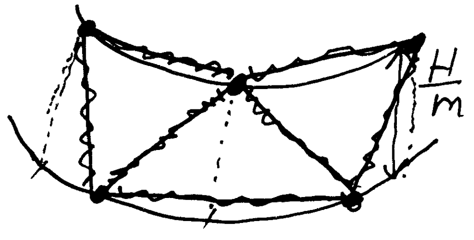
Schwarzov príklad (o aproximácii krivej plochy)

$\Sigma_{R,H}$ – cylindrická plocha polomeru R s výškou H

Do $\Sigma_{R,H}$ vpísanie mnohohranná (po častiach rovinné) plochu $\Sigma_{R,H}^{m,n}$ takto:

- po výške rozdelíme Σ na m-rovnakých častí (cylindrov s výškou $\frac{H}{m}$) – týmto na $\Sigma_{R,H}$ dostaneme $m+1$ deliacich kružníc
- každú z deliacich kružníc rozdelíme na n-rovnakých častí a to takým spôsobom, že body delenia na vyššej kružnici ležia nad stredmi medzi bodmi delenia na kruhej nižšej (najbližšej) kružnici

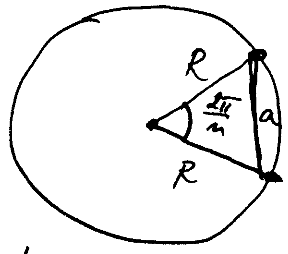


z týchto bodov vytvoríme ploch $\Sigma_{R,H}^{m,n}$ – poskladaná s nakreslených trojuholníkov.

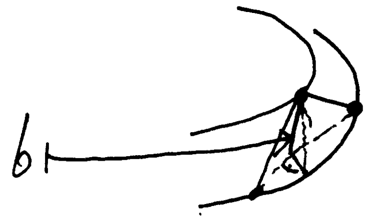
Počet týchto trojuholníkov je $\boxed{2mn}$

Spodná základňa každého je dlhá

$$a = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$



Vypočítame výšku týchto trojuholníkov b:



$$b^2 = R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{H^2}{m^2}$$

Takže obsah plochy $\Sigma^{m,n}_{R,H}$ je

$$\left|\Sigma^{m,n}_{R,H}\right| = 2mn\frac{1}{2}2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\frac{H^2}{m^2}\right]^{1/2}$$

$$= 2mnR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\frac{H^2}{m^2}\right]^{1/2} =$$

$$= 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[m^2R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2\right]^{1/2}$$

- Teraz pri $m,n \to +\infty$ zjavne diametre uvažovaných trojuholníkov sa zmenšujú do nuly a trojuholníčky plôch $\Sigma_{R,H}$ aproximujú.
- Ale pozrime sa na (prípadné)

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \left|\Sigma^{m,n}_{R,H}\right|$$

pri $n \to \infty$ máme $1-\cos\frac{\pi}{n} = 1-\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$

$= \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

a z toho je jasné, že limita:

$$\lim_{m,n\to\infty} \left|\Sigma_{R,H}^{m,n}\right|$$

NEEXISTUJE a teda <u>nie je rovná</u> $|\Sigma_{R,H}| = 2\pi RH$

(tomuto sa blíži hodnota $|\Sigma^{m,n}_{R,H}|$ len pre istý výber rastu m a n do $+\infty$:

- ak napr. uvážime $m = n \Rightarrow \infty$ tak:

$$\left|\Sigma^{k,k}_{R,H}\right| = 2kR\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\left[k^2R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{k}\right)^2+H^2\right]^{1/2} \to$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} 2\pi R\left[k^2R^2\left(\left(\frac{\pi^2}{2k^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)+H^2\right]^{1/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 2\pi RH =$$

$$= \left|\Sigma_{R,H}\right|$$

- ak uvážime napríklad $m \to +\infty$, $n \to +\infty$ tak, že $\frac{m}{n^2} \to Q$ $(=\text{const})$, t.j. $m = Q\cdot n^2$, tak:

$$\left|\Sigma^{Qn^2,n}_{R,H}\right| = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[Q^2n^4R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2\right]^{1/2} =$$

$$\overset{n\to+\infty}{=} 2\pi R\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left[Q^2n^4R^2\left(\left(\frac{\pi^2}{2n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+H^2\right]^{1/2} \to$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{2\pi R\left[H^2+\frac{\pi^4R^2}{4}Q^2\right]^{1/2}}$$