Uvažujme trigonometrický rad

$$\sum_n a_n \sin nx, \tag{*}$$

kde postupnosť $\{a_n\}_n$ je kladná a do nuly klesajúca. Potom vieme z dirichletovho kritéria, že rad (*) konverguje rovnomerne v každom uzavretom intervale neobsahujúcom celé násobky hodnoty 2π. pozrieme sa na to, za akých okolností (ohľadom postupnosti $\{a_n\}$) tento rad (*) bude konvergovať rovnomerne v každom intervale.

pripomeňme ako známe fakty:

(1) ak

$$\sum_n a_n < +\infty, \tag{1}$$

potom rad (*) konverguje rovnomerne v $\mathbb{R}$ v dôsledku Weierstrassovho kritéria.

(2) rad

$$\sum_n \frac{1}{n} \sin nx \tag{2}$$

nekonverguje rovnomerne v okoliach celých násobkov 2π (pozri (3) pre dôkaz).

Zameriame sa na vyšetrenie *medzery* medzi prípadmi (1) a (2). Nech $p \in \mathbb{N}$ a nech

$$x = \frac{\pi}{2p}$$

a tiež

$$n = \left[\frac{1}{2}p + 1\right]$$

(n je celá časť z pravej strany). Potom máme

$$\begin{aligned} &a_n \sin nx + a_{n+1} \sin[(n+1)x] + \cdots + a_p \sin px > \\ &> a_p\{\sin nx + \cdots + \sin px\} > a_p \left(\frac{1}{2}p - 1\right) \sin \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{3}$$

ak rad (*) konverguje rovnomerne (v okoliach nuly), potom nutne ľavá strana (3) konverguje do nuly pri $p \to +\infty$ a preto je nutné, aby

$$a_n n \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{4}$$

na rovnomernú konvergenciu rady (*) v okoliach nuly je teda nutné, aby platilo (4).

Ukážeme, že (4) je aj *postačujúce* na rovnomernú konvergenciu (4) v okoliach nuly. ukážeme, že platí

lema 1 *nech*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$$

a nech existujú pevné čísla m, M, *že*

$$m \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq M$$

pre všetky n. *Potom*

$$a_1 m \leq \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \leq a_1 M. \tag{5}$$

Dokážeme tvrdenie lemy. Nech

$$s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

V tomto označení máme

$$\begin{aligned}&\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = a_1 s_1 + a_2(s_2 - s_1) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1}) = \\ &= s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \cdots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n \leq \\ &\leq M\{a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n\} = M a_1,\end{aligned}$$

čo je požadovaný horný odhad a rovnako z druhej strany

$$\begin{aligned}&\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = a_1 s_1 + a_2(s_2 - s_1) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1}) = \\ &= s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \cdots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n \geq \\ &\geq m\{a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n\} = m a_1,\end{aligned}$$

čo je požadovaný dolný odhad. Tým sme dokázali (5).

Vráťme sa teraz k radu (*). Členy tohto radu sú nepárne a 2π-periodické funkcie, preto stačí uvažovať $x \in [0, \pi]$. Zoberieme súčty

$$S_{n,p} = a_n \sin nx + \cdots + a_p \sin px.$$

Nech teraz

$$\mu_n = \max_{q \geq n}\{q a_q\}.$$

Ak predpokladáme, že (4) je pravda, tak potom je pravda aj

$$\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{6}$$

Nech najprv

$$x \geq \frac{\pi}{n}.$$

Použijeme našu lemu. Máme pre akékoľvek n a r

$$\begin{aligned}&|\sin nx + \cdots + \sin rx| = \left|\frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{x}\end{aligned}$$

a teda podľa našej lemy máme

$$|S_{n,p}| \leq a_n \frac{\pi}{n} \leq n a_n \leq \mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ak je teraz

$$x \leq \frac{\pi}{p},$$

tak z nerovnosti $\sin u < u$ máme

$$|S_{n,p}| \leq a_n n x + \cdots + a_p p x \leq p x \mu_n \leq \pi \mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Napokon, nech

$$\frac{\pi}{p} < x < \frac{\pi}{n}.$$

V tomto prípade použijeme trojuholníkovú nerovnosť

$$|S_{n,p}| \leq |S_{n,k}| + |S_{k+1,p}|$$

a na prvý sčítanec použijeme našu lemu a na druhý sčítanec použijeme druhý argument čím máme

$$|S_{n,p}| \leq k\mu_n x + a_{k+1}\frac{\pi}{x} \leq \mu_n\{kx + \frac{\pi}{(k+1)x}\}.$$

Ak zoberieme

$$k = \left[\frac{\pi}{x}\right],$$

tak máme

$$|S_{n,p}| \leq (\pi + 1)\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Pre ktorékoľvek x teda

$$|S_{n,p}| \leq \text{const} \times \mu_n,$$

čo dokazuje rovnomernú konvergenciu radu (*) v $\mathbb{R}$ za predpokladu (4).