nájdite riešenia dif. rovnice

$$xy''(x) + y(x) = 0 \tag{A}$$

v tvare potenčného radu so stredom v bode 0.

hľadáme riešenia rovnice (A) v tvare

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

dosadením do rovnice (A) máme rovnosť

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

alebo po úprave

$$a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

alebo

$$\underbrace{a_0}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underbrace{a_{n+1}(n+1)n + a_n}_{=0}]x^n = 0.$$

teda máme

$$\begin{aligned} &a_0 = 0, \\ &a_{n+1} = -\frac{a_n}{n(n+1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{B}$$

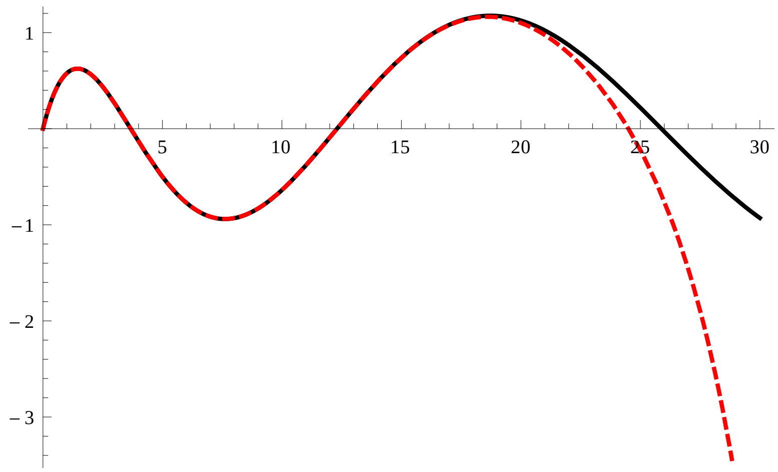
riešením systému (B) je

$$a_0 = 0, \; a_k = \frac{(-1)^{k+1} a_1}{[(k-1)!]^2 k}, \quad k \geq 2; \; a_1 \in \mathbb{R}. \tag{C}$$

(C) predstavuje jednorozmerný priestor riešení – riešenia analytické v nule teda netvoria fundamentálny systém riešení rovnice (A). riešenia (C) sú generované funkciou (napr. $a_1 = 1$)

$$Y_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{[(k-1)!]^2 k} x^k. \tag{D}$$

(D) zadáva riešenie rovnice (A) v celom $\mathbb{R}$ lebo polomer konv. uvedeného radu je $+\infty$.



Obr. 1: aproximácia funkcie Y_1 12-timi členmi radu (D) – červená čiara a numerické riešenie rovnice (A) s Cauchyho podmienkami $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ [presným riešením tejto úlohy je funkcia Y_1]