Príklady k prednáške MATEMATIKA 3

EUGEN VISZUS[1] a MICHAL DEMETRIAN[2]

1 Metrické priestory

1.1. Nech $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \quad x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$, $\rho_k: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, 3$ sú funkcie dané predpismi:

$$\rho_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad \rho_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \quad \rho_3(x,y) = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| \quad .$$

Dokážte, že $\rho_k, k = 1, 2, 3$ je metrika.
Ďalej ukážte, že všetky uvedené metriky sú navzájom ekvivalentné (viď poznámka).
pozn.: Hovoríme, že metriky ρ, σ v množine X sú ekvivalentné, ak existujú také dve kladné konštanty c_1, c_2, že pre každé $x, y \in X$ platí:

$$c_1\rho(x,y) \le \sigma(x,y) \le c_2\rho(x,y) \quad .$$

1.2. (a.) Rozhodnite, či v množine reálnych čísel sú nasledovné funkcie :
$d_1(x,y) = |\arctan(x-y)|$, $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, $d_3(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$ a $d_4(x,y) = ||x|-|y||$ metrikami.
(b.) Pre ktoré $a \in \mathbb{R}$ je funkcia

$$d_a(m,n) = \begin{cases} a + 1/(m+n) & \text{ak} \quad m \ne n \\ 0 \quad \text{ak} \quad m = n \end{cases}$$

metrika v množine prirodzených čísel?
Svoje tvrdenia zdôvodnite!

1.3. Nech funkcie ρ_1 a ρ_2 sú metriky v množine X. Rozhodnite, či aj nasledovné funkcie:

$$\rho_a(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y), \quad \rho_b(x,y) = \rho_1(x,y) - \rho_2(x,y) \quad ,$$

$$\rho_c(x,y) = \min\{\rho_1(x,y), \rho_2(x,y)\}, \quad \rho_d(x,y) = \max\{\rho_1(x,y), \rho_2(x,y)\} \quad ,$$

$$\rho_e(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x,y) + \rho_2^2(x,y)}, \quad \rho_f(x,y) = \ln\left[1 + \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)\right] \quad ,$$

sú metrikami v X. Svoje tvrdenia zdôvodnite!

1.4. Nech (X,ρ) a (Y,σ) sú metrické priestory. Potom aj dvojice (Z, d_i), $i = 1, 2$, kde

$$Z = X \times Y = \{(x,y): \quad x \in X, y \in Y\} \quad ,$$

a funkcie $d_i : Z \to \mathbb{R}$ dané nasledovnými predpismi

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \rho(x_1,x_2) + \sigma(y_1,y_2) \quad ,$$

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{\rho^2(x_1,x_2) + \sigma^2(y_1,y_2)} \quad ,$$

sú metrické priestory. Dokážte!

[1] *viszus@fmph.uniba.sk*
[2] *demetrian@fmph.uniba.sk*

1.5. Nech (X,ρ) je metrický priestor a $x,y,z,w \in X$, dokážte, že platí nerovnosť:

$$|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \le \rho(x,z)+\rho(y,w) \quad .$$

1.6. Pre $p \ge 1$ označme

$$l^p = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$$

a nech $\rho_p : \quad l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ je daná predpisom

$$\rho_p(x,y) := \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p} \quad .$$

Ukážte, že l^p je lineárny priestor a ρ_p je metrika v l^p pre $p=1$ a pre $p=2$.

1.7. Nech l^{∞} je množina ohraničených postupností:

$$l^{\infty} = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\} \quad .$$

Ukážte, že funkcia ρ definovaná nasledovne

$$\rho(x,y) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$$

je metrika v l^{∞}.

1.8. Nech S je množina všetkých postupností reálnych (komplexných) čísel $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Dokážte, že funkcia $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ daná vzťahom

$$\rho(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \quad ,$$

je metrika v S. Ukážte, že metrický priestor (S,ρ) je ohraničený.
pozn.: Ohraničenosť metrického priestoru (X,ρ) znamená, že existuje $c \ge 0$ také, že

$$\sup_{x,y \in X} \rho(x,y) \le c \quad .$$

1.9. (a) Ukážte, že funkcie ρ a ρ_1 dané vzťahmi:

$$\rho(f,g) := \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| \quad ,$$

$$\rho_1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \quad ,$$

sú metriky v $C(\langle a,b \rangle)$.
(b) Rozhodnite ďalej, či ρ_1 je metrika v množine všetkých Riemanovsky integrovateľných funkcií na intervale $\langle a,b \rangle$.
(c) Zistite, či metriky ρ a ρ_1 sú ekvivalentné v $C(\langle a,b \rangle)$.

1.10. Ak (X, ρ) je MP a $A \subset X$, potom definujeme vzdialenosť bodu $x \in X$ od A takto:

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a) \quad .$$

Ukážte, že:
(a) ak $x \in A \Rightarrow \rho(x, A) = 0$, ale opačná implikácia neplatí,
(b) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0$.

1.11. Ak (X, ρ) je MP a $A, B \subset X$, tak definujeme vzdialenosť množiny A od množiny B (resp. B od A) takto:

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b) \quad .$$

Nájdite príklad X, ρ, A, B tak aby: $A \cap B = \emptyset$ a $\rho(A, B) = 0$.

1.12. Ukážte, že dvojica $(C(\langle a, b \rangle), \rho_p)$, kde

$$\rho_p(f, g) := \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x \right]^{1/p}$$

je pre každé $p \geq 1$ metrický priestor. Uvedené tvrdenie možno dokázať postupným použitím nasledujúcich 4 tvrdení.

A. YOUNGOVA NEROVNOSŤ: nech $f : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, f je diferencovateľná, rastúca a $f(0) = 0$ a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$. Ak označíme g inverznú funkciu k f, potom pre každé $\alpha, \beta \geq 0$ platí :

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\beta g(x)\mathrm{d}x \quad .$$

Dokážte!

B. CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOVSKY NEROVNOSŤ: pre každé $p, q > 1$ také že $1/p + 1/q = 1$ a pre každé $u, v \geq 0$ platí

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad .$$

Dokážte!

C. HÖLDEROVA NEROVNOSŤ: nech $f, g \in C(\langle a, b \rangle)$ a $p, q > 1$, pričom $1/p + 1/q = 1$. Potom platí:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x \right]^{1/q} \quad .$$

Dokážte!

D. MINKOWSKÉHO NEROVNOSŤ: nech $f, g \in C(\langle a, b \rangle)$ a $p \geq 1$, potom platí:

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \mathrm{d}x \right]^{1/p} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p \mathrm{d}x \right]^{1/p} \quad .$$

Dokážte!

1.13. Nech $g : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá funkcia a taká, že $\forall x \in (0,1) : \quad g(x) > 0$. Rozhodnite, či zobrazenia ρ a σ dané predpismi

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{0\le x\le 1} |g(x)(f_1(x) - f_2(x))|, \quad \sigma(f_1, f_2) = \int_0^1 \mathrm{d}x |g(x)(f_1(x) - f_2(x))|$$

metrikami v množine $C(\langle 0,1\rangle)$. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

1.14. Ak p je fixné prvočíslo, potom každé nenulové racionálne číslo x možno zapísať jednoznačne v tvare

$$x = \pm p^{\gamma}\frac{a}{b} \quad ,$$

kde $\gamma \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ a čísla a, b sú prirodzené (t.j. $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots\}$), ktoré nie sú deliteľné prvočíslom p a nie sú súdeliteľné. [DOKÁŽTE!]. Teraz, ak máme vyjadrené racionálne číslo $x \in \mathbb{Q}$ vo vyššie uvedenom tvare, tak môžeme zaviesť reálneznačnú funkciu na racionálnych číslach

$$n_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad n_p(x) = \begin{cases} p^{-\gamma} & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Teraz pre $x, y \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\pi_p(x, y) = n_p(x - y) \quad .$$

Dokážte, že π_p je metrika v $\mathbb{Q}$. Ukážte ďalej, že funkcia n_p má vlastnosti:

$$n_p(xy) = n_p(x)n_p(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad ,$$

$$n_p(x + y) \le \max\{n_p(x), n_p(y)\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}; \quad [\text{tzv. ultrametricita}] \quad .$$

1.15. Nech $p_1 \neq p_2$ sú prvočísla. Rozhodnite, či metriky π_{p_1} a π_{p_2} v $\mathbb{Q}$ definované v úlohe 1.14 sú ekvivalentné. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
Návod: Uvažujte postupnosť $\{p_1^n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$.

1.16. Bod x uzáveru množiny X v metrickom priestore (Y, ρ) je buď hromadný bod X, alebo patrí do X. Dokážte!

1.17. Ukážte, že v MP je každá konečná množina uzavretá.

1.18. V MP (X, ρ) platí: ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje k $x_0 \in X$, tak potom pre každé $x \in X$ je

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = \rho(x, x_0) \quad .$$

Dokážte!

1.19. Nech ρ a σ sú metriky v X. Dokážte, že ρ a σ sú ekvivalentné práve vtedy, keď každá postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je konvergentná v priestore (X, ρ) práve vtedy, keď je konvergentná v priestore (X, σ). (Definícia ekvivalentných metrík je v poznámke k úlohe 1.1.)

1.20. Uvažujte množinu

$$\mathcal{S}((0,\infty)) = \Big\{ f \in C^\infty((0,\infty)) : \quad \forall n > 0 : \quad \lim_{x\to\infty} x^n f(x) = 0 \Big\} \quad .$$

Ukážte, že zobrazenia ρ a σ dané predpismi

$$\rho(f,g) = \sup_{0\le x<\infty} |f(x) - g(x)|, \quad \sigma(f,g) = \int_0^\infty |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$$

sú metriky v $\mathcal{S}((0,\infty))$. Ďalej uvažujte postupnosť bodov z $\mathcal{S}((0,\infty))$ takú, že jej n-tý člen má tvar:

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}+1} \quad .$$

Zistite, či v metrických priestoroch $(\mathcal{S}((0,\infty)),\rho)$ resp. $(\mathcal{S}((0,\infty)),\sigma)$ postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

1.21. Ukážte, že priestor l^∞, definovaný v znení úlohy 1.7, nie je separabilný.

1.22. Zistite, či v metrickom priestore (X,ρ) platia výroky:
(a) ľubovoľné zjednotenia a konečné prieniky otvorených množín sú otvorené množiny,
(b) ľubovoľné prieniky a konečné zjednotenia uzavretých množín sú uzavreté množiny,
(c) zjednotenie uzavretých množín je uzavretá množina,
(d) prienik otvorených množín je otvorená množina .
Svoje tvrdenia zdôvodnite.

1.23. V MP (X,ρ) platí: ak každá jednobodová podmnožina X je otvorená, tak každá podmnožina X je otvorená. Dokážte.

1.24. (a) Ukážte, že v MP (X,ρ) je otvorená guľa

$$B(x,r) = \{y \in X : \quad \rho(x,y) < r\} \quad ,$$

otvorená množina a uzavretá guľa

$$G(x,r) = \{y \in X : \quad \rho(x,y) \le r\} \quad ,$$

uzavretá množina.
(b) Rozhodnite, či platí:

$$\bar{B}(x,r) = G(x,r) \quad .$$

1.25. Nech $\mathbb{Q}$ sú racionálne čísla. Uvažujte množinu

$$A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q} \quad .$$

V $\mathbb{Q}$ uvažujte metriky ρ_1 a ρ_2 dané predpismi

$$\rho_1(x,y) = |x-y|,$$

$$\rho_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad x \neq y \\ 0 & \text{pre} \quad x = y \end{cases} \quad .$$

V metrických priestoroch $(\mathbb{Q},\rho_1)$, $(\mathbb{Q},\rho_2)$ nájdite uzáver množiny A.

1.26. Uvažujte metrický priestor $(\mathbb{Q}, \pi_p)$ z úlohy 1.14. Nech $\gamma \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Ukážte, že uzavretá guľa

$$G(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{Q} : \quad \pi_p(x, y) \leq p^\gamma\}$$

je otvorená množina. [Podľa úlohy 1.24 je to aj uzavretá množina].
Ďalej ukážte, že ak $x_0 \in G(x, \gamma)$, tak x_0 je stred gule $G(x, \gamma)$ - teda, že pre každé $y \in G(x, \gamma)$ platí: $\pi_p(x_0, y) \leq p^\gamma$ - (t.j. každý bod uzavretej gule v MP $(\mathbb{Q}, \pi_p)$ je jej stred).
A ďalej ukážte, že ak $G(a, \gamma_1)$ a $G(b, \gamma_2)$ sú uzavreté gule v MP $(\mathbb{Q}, \pi_p)$ také, že ich prienik nie je prázdna množina, potom jedna z nich je podmnožinou druhej.

1.27. V metrickom priestore (X, ρ) platí: ak $G_1, G_2 \subset X$ sú disjunktné uzavreté množiny, potom existujú disjunktné otvorené množiny $U_1, U_2 \subset X$ také, že $G_1 \subset U_1$ a $G_2 \subset U_2$. Dokážte!

1.28. Nech $X = \langle 0, 1\rangle$ a $\mathbb{Q} \subset X$ sú racionálne čísla z X. Uvažujte v X tzv. triviálnu metriku ρ: $\rho(x, y) = 1$ pre $x \neq y$ a $\rho(x, y) = 0$ pre $x = y$. Nájdite uzáver množiny $\mathbb{Q}$ v tomto priestore.

1.29. V metrickom priestore $(C(\langle a, b\rangle), \rho)$, kde ρ je metrika z úlohy 1.9, rozhodnite, či nasledovné množiny sú otvorené, uzavreté alebo nemajú ani jednu z uvedených vlastností:
(a)

$$A = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : \quad f(a) = 0\} \quad ,$$

(b)

$$B = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : \quad f(a) > 0\} \quad ,$$

(c)

$$C = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : \quad f(a) = f(b)\} \quad ,$$

(d)

$$A = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0\} \quad .$$

1.30. Vyriešte úlohu 1.29, ak metriku z nej zameníte za metriku ρ_p z úlohy 1.12 pre $p = 1$.

1.31. Nech $P \subset C(\langle a, b\rangle)$ je množina všetkých polynómov definovaných na intervale $\langle a, b\rangle$. Uvažujte metrické priestory:
(a) $(C(\langle a, b\rangle), \rho)$ z úlohy 1.9,
(b) $(C(\langle a, b\rangle), \rho_p)$ z úlohy 1.12 pre $p = 1$ a pre $p = 2$,
a rozhodnite či je v týchto priestoroch množina P uzavretá. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

1.32. Uvažujte metrický priestor $(C(\langle a, b\rangle), \rho)$ z úlohy 1.9. Ukážte, že množina

$$L_K = \{f \in C(\langle a, b\rangle) : \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \text{je} \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|\}$$

(Lipschitzovské funkcie s Lipschitzovou konštantou $K > 0$) je uzavretá.

1.33. Ukážte, že množina L_K z predchádzajúceho príkladu je v metrickom priestore $(C(\langle a,b\rangle),\rho)$ z úlohy 1.9 uzáverom množiny

$$D_K = \{f \in C(\langle a,b\rangle): \quad \forall x \in \langle a,b\rangle \quad |f'(x)| \leq K\} \quad .$$

1.34. Ukážte, že množina

$$L = \bigcup_{K>0} L_K \quad ,$$

kde množiny L_K sú definované vyššie, nie je uzavretá v metrike ρ z úlohy 1.9.

1.35. Uvažujte MP $C(\langle a,b\rangle)$ s metrikou ρ z úlohy 1.9. Rozhodnite, či jeho podmnožina $C^1(\langle a,b\rangle) \subset C(\langle a,b\rangle)$ (funkcie so spojitou prvou deriváciou) je uzavretá, otvorená, alebo nemá ani jednu z uvedených vlastností. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

1.36. Uvažujte metrický priestor $(C(\langle a,b\rangle),\rho)$ z úlohy 1.9 bod (a). Rozhodnite, či množina $AC(\langle a,b\rangle)$ - absolútne spojitých funkcií na intervale $\langle a,b\rangle$, je v tomto metrickom priestore otvorená, uzavretá, alebo nemá ani jednu uvedenú vlastnosť. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
pozn.: Funkcia $f: \quad \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ sa nazýva absolútne spojitá práve vtedy, keď ku každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každý systém disjunktných podintervalov $\langle a_i,b_i\rangle$, $i = 1,2,\ldots,n$, intervalu $\langle a,b\rangle$, ktorých dĺžky spĺňajú:

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$$

platí:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \quad .$$

1.37. Uvažujte množinu

$$BC^\infty(\mathbb{R}) = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \quad \text{a} \quad f \quad \text{má všetky derivácie}\} \quad .$$

(a) Ukážte, že funkcia $\rho: BC^\infty(\mathbb{R}) \times BC^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ daná predpisom

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$$

je metrika v $BC^\infty(\mathbb{R})$.
(b) Pre $f \in BC^\infty(\mathbb{R})$ definujeme nosič (support) predpisom

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}: \quad f(x) \neq 0\}} \quad .$$

pozn.: V $\mathbb{R}$ uvažujeme metriku σ od absolútnej hodnoty (viď úloha 1.48).
Ďalej uvažujme množinu $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset BC^\infty(\mathbb{R})$ danú nasledovne

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in BC^\infty(\mathbb{R}): \quad supp(f) \quad \text{je kompakt}\} \quad .$$

Rozhodnite, či $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ je uzavretá v $BC^\infty(\mathbb{R})$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
Návod: Nie je také ľahké nájsť príklad nenulovej funkcie z $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tu uvádzame jeden[3], ktorý vám pomôže odpovedať na položenú otázku:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{ak} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left[\frac{1}{x^2-1}\right] \quad \text{ak} \quad |x| < 1 \end{cases} \quad .$$

1.38. Nech (X, ρ) je úplný metrický priestor a $Y \subset X$ je uzavretá množina. Potom (Y, ρ) je tiež úplný metrický priestor. Dokážte!

1.39. Vezmime množinu (ohraničené funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$)

$$B(\langle a, b\rangle) = \left\{ f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} : \quad \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| < \infty \right\} \quad .$$

V $B(\langle a, b\rangle)$ uvažujte funkciu dvoch premenných

$$\rho(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \quad .$$

Ukážte, že ρ je metrika v $B(\langle a, b\rangle)$ a dvojica $(B(\langle a, b\rangle), \rho)$ je úplný metrický priestor.

1.40. Dokážte, že metrický priestor $(C(\langle a, b\rangle), \rho)$ z úlohy 1.9 je úplný metrický priestor.

1.41. Ukážte, že priestor l^p z úlohy 1.6 je pre $p = 2$ úplný metrický priestor.

1.42. Ukážte, že priestor spojitých funkcií $C(\langle -1, +1\rangle)$ s metrikou ρ_p z úlohy 1.12 pre $p = 2$ nie je úplný.

1.43. Rozhodnite, či metrický priestor $(\mathbb{Q}, \pi_p)$ z úlohy 1.14 je úplný metrický priestor. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
Návod: Uvažujte rad v $(\mathbb{Q}, \pi_p)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \quad ,$$

kde $x_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Vezmite takú postupnosť $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, ktorá nie je periodická.

1.44. Zobrazenie metrických priestorov $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ je spojité v $x \in X$ práve vtedy keď pre každú postupnosť $\{x\}_n \subset X$ takú, že $x_n \to^\rho x$ platí $f(x_n) \to^\sigma f(x)$. Dokážte!

1.45. (a) Uvažujte metrický priestor $(C(\langle a, b\rangle), \rho)$ z úlohy 1.9 a metrický priestor $(\mathbb{R}, \sigma)$ z úlohy 1.48. Vyšetrite spojitosť zobrazenia $\mathcal{RI} : (C(\langle a, b\rangle), \rho) \to (\mathbb{R}, \sigma)$, daného nasledovným predpisom

$$\mathcal{RI}(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad .$$

(b) Uvažujte zobrazenie $\mathcal{RI}$ dané tým istým predpisom ako v bode (a), ale chápte ho ako zobrazenie $\mathcal{RI} : (C(\langle a, b\rangle), \rho_p) \to (\mathbb{R}, \sigma)$, kde metrika ρ_p je definovaná v úlohe 1.12. Vyšetrite spojitosť zobrazenia $\mathcal{RI}$.

[3] Pomocou tohoto príkladu možno skonštruovať mnoho funkcií z $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1.46. Nech $g \in C(\langle a,b\rangle)$ je pevne zvolená funkcia. Uvažujme zobrazenie Q_g definované na množine $C(\langle a,b\rangle)$ predpisom ($x \in \langle a,b\rangle$)

$$(Q_g f)(x) = g(x)f(x) \quad .$$

Zistite, či
(a) $Q_g(C(\langle a,b\rangle)) \subset C(\langle a,b\rangle)$,
(b) $Q_g : C(\langle a,b\rangle) \to C(\langle a,b\rangle)$ je spojité zobrazenie, ak v $C(\langle a,b\rangle)$ uvažujeme metriku
b1.) ρ z úlohy 1.9,
b2.) ρ_p z úlohy 1.12;
b3.) ak na definičnom obore uvažujeme metriku ρ z úlohy 1.9 a na obore hodnôt metriku ρ_1 z úlohy 1.9.

1.47. Nech (X,ρ) je MP a $A \subset X$. Nech ďalej $f : X \to \mathbb{R}$ tak, že

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak} \quad x \notin A \\ 1 & \text{ak} \quad x \in A \end{cases} \quad .$$

Potom f je spojitá práve vtedy, keď A je súčasne otvorená aj uzavretá. Dokážte!

1.48. Nech (X,ρ) je MP s triviálnou metrikou, t.j.

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ak} \quad x = y \\ 1 & \text{ak} \quad x \neq y \end{cases} \quad ,$$

a v $\mathbb{R}$ uvažujeme metriku absolútnej hodnoty

$$\sigma(x,y) = |x-y| \quad .$$

Nájdite všetky spojité zobrazenia f:
(a) $f : \mathbb{R} \to X$ (b) $f : X \to \mathbb{R}$.

1.49. (a) Majme dané

$$\mathcal{S} : \quad C(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}; \quad \mathcal{S}(f) = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \quad ,$$

kde $(C(\langle a,b\rangle),\rho)$ je metrický priestor z úlohy 1.9 a v $\mathbb{R}$ máme metriku σ z úlohy 1.48. Rozhodnite, či $\mathcal{S}$ je spojité zobrazenie a svoje tvrdenia zdôvodnite.
(b) Uvažujte to isté zobrazenie $\mathcal{S}$ ako v bode (a), ale definujte ho na metrickom priestore $(C(\langle a,b\rangle),\rho_p)$ z úlohy 1.12. Rozhodnite o spojitosti zobrazenie $\mathcal{S}$. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

1.50. V $C(\langle a,b\rangle)$ uvažujte zobrazenie $\delta_x : \quad C(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$:

$$\delta_x(f) = f(x) \quad \text{kde} \quad x \in (a,b) \quad \text{je pevne dané} \quad .$$

V $\mathbb{R}$ uvažujte metriku σ z úlohy 1.48. Rozhodnite, či δ_x je spojité, ak v $C(\langle a,b\rangle)$ uvažujete metriku :
(a) ρ z úlohy 1.9;
(b) ρ_p pre $p = 1$ z úlohy 1.12;
(c) ρ_p pre $p = 2$ z úlohy 1.12;
(d) triviálnu z úlohy 1.48.

1.51. Uvažujte zobrazenie $T : C^1(\langle a,b\rangle) \to C(\langle a,b\rangle)$ dané predpisom:

$$(Tf)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \quad .$$

Vyšetrite spojitosť zobrazenia T v prípadoch: $T : (C^1, \rho_1) \to (C, \rho)$, resp. $T : (C^1, \rho) \to (C, \rho)$, kde metrika ρ_1 je daná predpisom

$$\rho_1(f,g) = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x) - g'(x)| \quad ,$$

a metrika ρ je z úlohy 1.9.

1.52. Uvažujte zobrazenie T z úlohy 1.51 ako zobrazenie metrických priestorov $T : (C^1(\langle a,b\rangle), \rho_2) \to (C(\langle a,b\rangle), \rho_2)$, kde ρ_2 je metrika ρ_p z úlohy 1.12 pre $p = 2$. Rozhodnite, či T je spojité zobrazenie. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

1.53. Majme daný priestor $C(\langle a,b\rangle)$ s metrikou ρ_p z úlohy 1.12, kde $p > 1$. Ďalej uvažujme identické zobrazenie $Idf = f$ ako zobrazenie metrických priestorov $Id : (C(\langle a,b\rangle), \rho_p) \to (C(\langle a,b\rangle), \rho_q)$. Pre aké $p, q > 1$ je Id spojitým zobrazením? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

1.54. Nech ρ a σ sú metriky v X. Potom identita ($Id(x) = x$) je spojitým zobrazením $Id : (X,\rho) \to (X,\sigma)$ aj $Id : (X,\sigma) \to (X,\rho)$ práve vtedy, keď metriky ρ a σ sú ekvivalentné. Dokážte!

1.55. Nech $f : \quad C(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$. V $\mathbb{R}$ uvažujte metriku σ z úlohy 1.48. V $C(\langle a,b\rangle)$ uvažujte metriky: ρ z úlohy 1.9 alebo metriku ρ_p z úlohy 1.12 pre $p = 1$. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:
(a) ak f je spojité, keď v $C(\langle a,b\rangle)$ uvažujeme metriku ρ, tak je spojité aj vtedy, keď uvažujeme metriku ρ_1.
(b) ak f je spojité, keď v $C(\langle a,b\rangle)$ uvažujeme metriku ρ_1, tak je spojité aj vtedy, keď uvažujeme metriku ρ.

1.56. Uvažujte MP $C(\langle a,b\rangle)$ s metrikou ρ z úlohy 1.9 a zobrazenie I_K^λ definované na $C(\langle a,b\rangle)$ takto:

$$\left(I_K^\lambda f\right)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y \quad ,$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, K je spojitá funkcia vo štvorci $a \le x \le b$, $a \le y \le b$.
(a) ukážte, že I_K^λ obraz $C(\langle a,b\rangle)$ je podmnožina $C(\langle a,b\rangle)$;
(b) I_K^λ je spojité zobrazenie;
(c) pre dané K nájdite také λ, aby I_K^λ bolo kontraktívne.

1.57. Uvažujte metrický priestor $C(\langle a,b\rangle)$ s metrikou ρ z úlohy 1.9. Ďalej uvažujte jeho podpriestor $C^1(\langle a,b\rangle)$ - funkcie so spojitou prvou deriváciou. Na $C^1(\langle a,b\rangle)$ uvažujte zobrazenie

$$L : \quad C^1(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}^+, \quad L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x, \quad \text{(dľžka krivky).}$$

Zistite, či L je spojité ak v $\mathbb{R}$ máme metriku σ z úlohy 1.48.

1.58. Uvažujte Cauchyho úlohu

$$y'(x) = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0 \quad ,$$

kde f je spojitá funkcia v $\mathbb{R}^2$ a naviac v istom kruhovom okolí bodu (x_0, y_0) platí:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad ,$$

kde $M > 0$ je číslo nezávislé od (x, y) (f je Lipschitzovská v premennej y v uvažovanom okolí). Ukážte, že pre isté $d > 0$ potom existuje jediné riešenie uvažovanej úlohy:

$$\hat{y} : \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle \to \mathbb{R}$$

1.59. Nech (X, ρ) je úplný metrický priestor a $A : X \to X$ je spojité zobrazenie. Potom ak existuje také prirodzené číslo n, že zobrazenie A^n je kontrakcia, tak rovnica

$$Ax = x$$

má v X práve jedno riešenie. Dokážte!

1.60. Ukážte, že nasledovné systémy nelineárnych rovníc majú jediné riešenie:
(a)

$$\begin{aligned} 10x &= 1 + \sin^2(x + 3y) \\ 3y &= x + \cos(x + y + 1) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 5x &= y + \sin(x + y) \\ 3y &= x + y + \cos(x - y) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x &= 1 + \sin(x + y) \\ 4y &= x + \cos(x - y) \end{aligned}$$

1.61. Ukážte, že jednotková sféra so stredom v nulovej postupnosti v priestore l^2 s metrikou definovanou v úlohe 1.6 je ohraničená množina, ale nie je totálne ohraničená - t.j. nie je kompaktná!

1.62. Uvažujte metrický priestor $(C(\langle 0, 1\rangle), \rho)$ z úlohy 1.9. Rozhodnite, či jeho podmnožina

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2 + n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

je kompaktná. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

1.63. Uvažujte metrický priestor $(C(\langle 0,1\rangle),\rho_1)$ z úlohy 1.9. Rozhodnite, či jeho podmnožina

$$A_0=\left\{f\in C(\langle 0,1\rangle):\quad \int_0^1 \mathrm{d}x f(x)=0\right\}$$

je a.) otvorená; b.) uzavretá; c.) ohraničená; d.) totálne ohraničená; e.) kompaktná; f.) hustá v $(C(\langle 0,1\rangle),\rho_1)$. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

1.64. Nech $\mathbb{R}^n$ je metrický priestor s metrikou ρ_1 z úlohy 1.1. Dokážte, že $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.

1.65. Nech (X,ρ) a (Y,σ) sú metrické priestory a $A\subset X$ je kompaktná. Nech ďalej $f: A\to Y$ je spojité zobrazenie. Potom množina:

$$f(A)=\{y\in Y:\quad \exists x\in A, y=f(x)\}$$

je kompaktná. Dokážte!

1.66. (a) Uvažujte na reálnych číslach metriku σ z úlohy 1.48. Ukážte, že bijekcia intervalu $\langle 0,1\rangle$ na interval $(0,1)$ nie je spojité zobrazenie.
(b) Zvoľte na $\mathbb{R}$ takú metriku, aby aspoň jedna bijekcia $\langle 0,1\rangle\to(0,1)$ bola spojitou.

1.67. Nech (X,ρ) je MP, $M\subset X$ je kompaktná množina. Ukážte, že spojité zobrazenie $f: M\to\mathbb{R}$, kde v $\mathbb{R}$ uvažujeme metriku σ z úlohy 1.48, je ohraničené - t.j. existuje $K>0$, že pre každé $x\in M$ je $|f(x)|\le K$.

1.68. Dokážte, že funkcia f definovaná v úlohe 1.67 nadobúda minimum a maximum.

2 Úvod do teórie Lebesgueovho integrálu

2.1. Nech $\mathbb{Q}_1$ sú racionálne čísla v intervale $\langle 0,1\rangle$. Ukážte, že funkcia (Dirichletova)

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{pre} \quad x\in\mathbb{Q}_1\\ 0 & \text{pre} \quad x\in\langle 0,1\rangle\setminus\mathbb{Q}_1\end{cases}$$

je merateľná.

2.2. Nech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť a $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$, sú merateľné funkcie. Dokážte, že
(a)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x)$$

je merateľná funkcia pre každé $c_i\in\mathbb{R}$ a $m\in\mathbb{N}$.
(b)

$$f(x)=\max_{1\le i\le m}\{f_i(x)\}$$

je merateľná funkcia pre každé $m \in \mathbb{N}$.
(c)

$$f(x) = \min_{1 \le i \le m} \{f_i(x)\}$$

je merateľná funkcia pre každé $m \in \mathbb{N}$.
(d)

$$g_i(x) = |f_i(x)|$$

je merateľná funkcia.

2.3. Nech funkcie $f_1, f_2 \in \Lambda_1(\Omega)$, potom aj funkcie $f_1 + f_2$, $\max\{f_1, f_2\}$ a $\min\{f_1, f_2\}$ sú z $\Lambda_1(\Omega)$. Dokážte!

2.4. Nech $f : I \to \mathbb{R}$, kde I je ohraničený otvorený interval, je spojitá v uzávere I. Potom f je triedy $\Lambda_1(I)$ aj triedy $\Lambda(I)$. Dokážte! Platí rovnaké tvrdenie aj pre funkciu spojitú v I ale nie v uzávere I? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.5. Ukážte, že funkcia f daná predpisom

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (0,1)$$

nepatrí do množiny $\Lambda((0,1))$ (t.j. nie je Lebesgueovsky integrovateľná.)

2.6. Nech je funkcia $f : \langle -1, +1 \rangle \to \mathbb{R}$ definovaná takto

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & \text{pre} \quad x \in \langle -1, 0) \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0 \\ x^{-1/3} & \text{pre} \quad x \in (0, +1\rangle \end{cases} .$$

Ukážte, že $f \in \Lambda(\langle -1, +1 \rangle)$ ale $f \notin \Lambda_1(\langle -1, +1 \rangle)$.

2.7. Ukážte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} \mathrm{d}x = 0 \quad .$$

2.8. Ukážte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} \mathrm{d}x = 0 \quad .$$

2.9. Ukážte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \mathrm{d}x = 1 \quad .$$

2.10. Ukážte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos(x) \mathrm{d}x = 0 \quad .$$

2.11. Nájdite nerastúcu postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, f_n je spojitá, nezáporná funkcia, takú aby:
a)
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$
b)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \neq 0 \quad .$$
Zrejme v tomto prípade vždy existuje limita z bodu b) (prečo?), možno nájsť postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ daných vlastností tak, aby limita z bodu b) bola vlastná? Svoje tvrdenia zdôvodnite.

2.12. Existuje taká množina $M \subset \mathbb{R}$, ktorá je nespočítateľná a má mieru nula? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.13. Nech $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je pre $(x, y) \neq (0, 0)$ daná nasledujúcim predpisom
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad .$$
Ukážte, že
$$\int_M f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
neexistuje, t.j. $f \notin \Lambda(M)$.

2.14. Nech M je množina z úlohy 2.13 a $f : M \to \mathbb{R}$ je pre $(x, y) \neq (0, 0)$ daná predpisom
$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3} \quad .$$
Ukážte, že
$$\int_M f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
neexistuje, t.j. $f \notin \Lambda(M)$.

2.15. Nech M je množina z úlohy 2.13 a $f : M \to \mathbb{R}$ je pre $y \neq 0$ daná predpisom
$$f(x, y) = \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}} \quad .$$
Ukážte, že
$$\int_M f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
neexistuje, t.j. $f \notin \Lambda(M)$.

2.16. Nech $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Majme danú postupnosť funkcií $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : B \to \mathbb{R}$ vzťahmi

$$f_k(x) = \frac{k^2||x||^k}{2\pi}(1 - ||x||), \quad \text{kde} \quad ||x|| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \quad .$$

Nájdite:
(a)

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad ,$$

(b)

$$\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)\mathrm{d}x \quad .$$

(c) Platí vzťah:

$$\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)\mathrm{d}x = \int_B \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \quad ?$$

Spĺňa postupnosť všetky predpoklady Lebesgueovej vety o limitnom prechode? Svoje tvrdenia zdôvodnite.

2.17. Rozhodnite, či funkcia

$$x \mapsto \sin(x^2), \quad x \in \langle 0, \infty)$$

je Lebesgueovsky integrovateľná. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3 Lineárne normované priestory a Hilbertove priestory

3.1. Dokážte, že v znení definície lineárneho normovaného priestoru (LNP) možno zameniť axiómu 1):

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$$

axiómou 1'):

$$||x|| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}$$

bez zmeny významu pojmu LNP.

3.2. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, $x_n, x, y_n, y \in X$, $\lambda, \lambda_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Dokážte:
(a)

$$x_n \to x \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{je ohraničená postupnosť,}$$

(b)

$$x_n \to x, \quad \lambda_n \to \lambda \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x \quad ,$$

(c)

$$x_n \to x \Rightarrow ||x_n|| \to ||x|| \quad ,$$

(d)

$$x_n \to x, \quad ||x_n - y_n|| \to 0 \Rightarrow y_n \to x \quad ,$$

(e)
$$x_n \to x \Rightarrow ||x_n - y|| \to ||x - y|| \quad ,$$
(f)
$$x_n \to x, \quad y_n \to y \Rightarrow ||x_n - y_n|| \to ||x - y|| \quad .$$

3.3. Nech $(X, ||.||)$ je lineárny normovaný priestor (LNP), definujme uzavretú guľu $G(x_0, R) \subset X$ so stredom v $x_0 \in X$ a polomerom $R \geq 0$ takto: $G(x_0, R) = \{x \in X : ||x - x_0|| \leq R\}$. Nech $G_1(a, r) \subset G_2(b, R)$, potom platia tvrdenia: $r \leq R$ a $||a - b|| \leq R - r$. Dokážte!

3.4. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, potom platí
$$\forall x, y \in X \quad \text{je} \quad ||x|| \leq \max\{||x - y||, ||x + y||\} \quad .$$
Dokážte!

3.5. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a $A \subset X$. Potom A je ohraničená (definíciu ohraničenosti viď v úlohe 1.8) práve vtedy, keď pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ a každú postupnosť $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, takú, že $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \mathbf{0} \quad .$$
Dokážte!

3.6. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, $A \subset X$, A je ohraničená množina. Potom aj $\bar{A}$ je ohraničená a platí
$$diam(A) = diam(\bar{A}) \quad .$$
Dokážte!
pozn.: Diametrom podmnožiny A metrického priestoru (X, ρ) nazývame číslo
$$diam(A) = \sup_{x,y\in A} \rho(x, y) = \sup_{x,y\in A} ||x - y|| \quad .$$

3.7. V každom LNP existujú dve otvorené disjunktné množiny také, že ich uzávery nie sú disjunktné. Skonštruujte takéto množiny!

3.8. Overte platnosť tvrdenia: $(X, ||.||)$ je LNP, $A, B \subset X$. Potom platí:
$$\bar{A} \subset \bar{B} \Rightarrow A \subset B \quad .$$

3.9. Nech $(X, ||.||)$ je LNP taký, že jeho rozmer je aspoň 3. Nech $x, y \in X$ sú nenulové lineárne nezávislé vektory. Definujme disk s hranicou s polomerom $R > 0$ so stredom v $\mathbf{0}$ v rovine xy takto
$$D(\mathbf{0}, R) = \{u \in X : \quad ||u|| \leq R \quad \text{a} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \quad u = \lambda_1 x + \lambda_2 y\} \quad .$$
Rozhodnite, či je množina $D(\mathbf{0}, R)$ uzavretá alebo otvorená. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3.10. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je taká postupnosť, že $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{n+1} - x_n|| < \infty$, potom $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská. Dokážte! Platí aj opačné tvrdenie?

3.11. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, ak $L \subset X$ je lineárny podpriestor a $L \neq X$, potom L nemôže obsahovať žiadnu guľu. Dokážte!

3.12. Dokážte, že nasledujúcimi výrazmi sú v daných množinách definované normy:
(a)

$$\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

a1)

$$||x|| = \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right]^{1/p} , \quad p \geq 1 \quad ,$$

a2)

$$||x|| = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \quad .$$

(b)

$$l^p = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\} \quad ,$$

$$||x|| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{1/p} \quad .$$

(c)

$$l^{\infty} = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \quad x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\} \quad ,$$

$$||x|| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \quad .$$

(d)

$$c^0 = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \quad x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} x_k = \mathbf{0}\right\} \quad ,$$

$$||x|| = \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \quad .$$

(e)

$$c = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \quad x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{konverguje v} \quad \mathbb{R}\} \quad ,$$

$$||x|| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \quad .$$

3.13. Dokážte, že nasledujúcimi výrazmi sú v daných množinách definované normy:
(a)

$$C(\langle a, b\rangle) = \{f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \quad f \quad \text{spojitá v} \quad \langle a, b\rangle\} \quad ,$$

$$||f|| = \max_{t \in \langle a, b\rangle} |f(t)| \quad .$$

(b)

$$C^k(\langle a, b\rangle) = \{f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \quad f, f', f'', \ldots, f^{(k)} \quad \text{spojité v} \quad \langle a, b\rangle\} \quad ,$$

$$||f|| = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \le t \le b} |f^{(i)}(t)| \quad .$$

(c)

$$M(\langle a,b\rangle) = \{f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, \quad f \quad \text{ohraničená na} \quad \langle a,b\rangle\} \quad ,$$
$$||f|| = \sup_{a \le t \le b} |f(t)| \quad .$$

(d)

$$C(\langle a,b\rangle) \quad ,$$
$$||f|| = \left[\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{1/p} \quad , \quad p \ge 1 \quad .$$

(e)

$$\tilde{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \in C(\mathbb{R}), \quad \exists \quad \text{interval} \quad I_f \subset \mathbb{R} \quad \text{že} \quad f \equiv 0 \quad \text{v} \quad \mathbb{R} \setminus I_f\} \quad ,$$
$$||f|| = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \quad .$$

3.14. Majme množinu $\mathbb{R}^m$ z úlohy 3.12 bod (a). Je výrazom

$$||x|| = \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right]^{1/p} \quad , \quad \text{pre} \quad 0 < p < 1, \quad m \ge 2$$

definovaná norma? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3.15. Rozhodnite, či v množine $\mathbb{R}^m$ z úlohy 3.12 bod (a) definujú nasledovné výrazy normy:
(a)

$$||x|| = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} |x_k|^2\right]^{1/2} \quad ,$$

(b)

$$||x|| = \max_{1 \le k \le m} \left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \quad .$$

3.16. Nech $A = [A_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, m$ je symetrická a pozitívne definitná matica. Dokážte, že v množine $\mathbb{R}^m$ z úlohy 3.12 bod (a) možno definovať normu vzťahom:

$$||x|| = \left[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} x_i x_j\right]^{1/2} \quad .$$

3.17. Nájdite takú postupnosť[4] $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k^{(n)} \in \mathbb{R}$, ktorá by patrila do prieniku nasledujúcej dvojice LNP (definovaných v úlohe 3.12) a pritom by platilo:
(a) konverguje v l^∞ a nekonverguje v l^1,
(b) konverguje v l^∞ a nekonverguje v l^2,
(c) konverguje v l^2 a nekonverguje v l^1,
(d) konverguje v c^0 a nekonverguje v l^1.

[4]Teda postupnosť postupností reálnych čísel.

3.18. Dokážte, že pre každé $p \geq 1$ každý prvok LNP l^p definovaného v úlohe 3.12 bod (b) je aj prvokom priestoru c^0, definovaného v úlohe 3.12 bod (d). Ukážte, že prvok

$$x = \left\{1, \frac{1}{\ln(2)}, \frac{1}{\ln(3)}, \ldots, \frac{1}{\ln(n)}, \ldots\right\}$$

patrí do c^0, ale nepatrí do l^p pre žiadne $p \geq 1$.

3.19. Dokážte, že ak považujeme l^1 za podmnožinu LNP l^∞, potom uzáver množiny l^1 v norme priestore l^∞ je množina c^0. (Množiny c^0, l^1 a LNP l^∞ sú definivané v úlohe 3.12).

3.20. Nech $(C(\langle 0,1\rangle), ||.||)$, $(C^1(\langle 0,1\rangle), ||.||)$ sú LNP definované v úlohe 3.13 (a) a (b). Vyšetrite v oboch uvedených priestoroch konvergenciu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \quad .$$

3.21. Nech $(C(\langle 0,1\rangle), ||.||)$ je LNP z úlohy 3.13 bod (a) Vyšetrite v tomto priestore konvergenciu postupností:

(a)

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad f_n(t) = t^n - t^{n+1} \quad ,$$

(b)

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad g_n(t) = t^n - t^{2n} \quad .$$

3.22. Dokážte, že konvergentná postupnosť funkcií z priestoru $C(\langle a,b\rangle)$ s normou z úlohy 3.13 bod (a) bude konvergentná aj v priestore $C(\langle a,b\rangle)$ s normou z úlohy 3.13 bod (d) pre $p = 2$. Bude platiť aj obrátené tvrdenie? Zdôvodnite svoje tvrdenie.

3.23. Vezmime lineárny priestor $C^2(\langle a,b\rangle)$ definovaný v úlohe 3.13 bod (b) a uvažujme na ňom funkcie n_i, $i = 1,2,3,4$:

$$n_1(f) = |f(a) + f'(a)| + \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|, \quad n_2(f) = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)| + \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x} \quad ,$$

$$n_3(f) = |f(a)| + |f(b)| + \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|, \quad n_4(f) = |f(a)| + \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)| + \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x} \quad .$$

Rozhodnite, či n_i sú normy na tomto priestore.

3.24. Nech $\mu \in C(\langle a,b\rangle)$. Nájdite čo možno najmenšie obmedzenia na funkciu μ také, aby zobrazenie

$$N_\mu : C(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R} \quad N_\mu(f) = \int_a^b \mu^2(x)|f(x)|\mathrm{d}x$$

bolo normou na $C(\langle a,b\rangle)$. [Viď úloha 1.13.]

3.25. Nech $C^1(\langle a,b\rangle)$ je lineárny priestor definovaný v úlohe 3.13 bod (b). Vyšetrite, či funckcie n_i, $i = 1,2,3,4,5$:

$$n_1(f) = \max_{a\le t\le b} |f(t)|, \qquad n_3(f) = |f(a) - f(b)| + \max_{a\le t\le b} |f'(t)| \quad ,$$

$$n_2(f) = \max_{a\le t\le b} |f'(t)|, \qquad n_4(f) = |f(a)| + \max_{a\le t\le b} |f'(t)| \quad ,$$

$$n_5(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \max_{a\le t\le b} |f'(t)| \quad ,$$

definujú normy v tomto priestore.

3.26. Uvažujte LNP $C(\langle a,b\rangle)$ s normou z úlohy 3.13 bod (a). Rozhodnite, či množiny:
(a) polynómy stupňa najviac k (k - prirodzené číslo),
(b) polynómy stupňa k
sú otvorené alebo uzavreté v tomto priestore.

3.27. Dokážte, že v priestore z úlohy 3.26 je množina

$$M = \{f \in C(\langle a,b\rangle): \quad |f(t)| < 1 \quad \text{pre} \quad t \in \langle a,b\rangle\}$$

otvorená.

3.28. Nech funkcia $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá (pri metrike $\rho(x,y) = |x-y|$ v $\mathbb{R}$). Dokážte, že množina

$$M_f = \{x \in \mathbb{R}: \quad f(x) < 1\}$$

je otvorená v $\mathbb{R}$.

3.29. Nech $C(\langle a,b\rangle)$ je LNP z úlohy 3.26. Dokážte, že množina spojitých po častiach lineárnych funkcií je hustá v $C(\langle a,b\rangle)$.
pozn.: Funcia $f: \quad \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ sa nazýva spojitá po častiach lineárna ak je spojitá a existuje konečne veľa čísel t_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ takých, že $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$, že v každom z intervalov $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$ je f lineárna.

3.30. Nech l^2 je LNP definovaný v úlohe 3.12 bod (b) pre $p = 2$. Nájdite podmienku, ktorú musí spĺňať postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ taká, že $a_n > 0$, aby:
(a) rovnobežnosten

$$A = \{x \in l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \quad |x_n| < a_n\} \quad ,$$

(b) elipsoid

$$B = \left\{x \in l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1\right\}$$

boli ohraničenými množinami.

3.31. Dokážte, že rovnobežnosten

$$C = \{x \in l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \quad |x_n| < 1\} \quad ,$$

kde l^2 je LNP z úlohy 3.30, je otvorená množina.

3.32. Budeme hovoriť, že LNP $(X, ||.||)$ je rýdzo normovaný lineárny priestor, ak platí:

$$(x, y \in X, x \neq \mathbf{0}, y \neq \mathbf{0}, \quad ||x+y|| = ||x|| + ||y||) \Rightarrow (y = \lambda x, \lambda > 0) \quad .$$

Dokážte, že LNP $(X, ||.||)$ je rýdzo normovaný práve vtedy, keď sféra

$$S_1(\mathbf{0}) = \{x \in X : \quad ||x|| = 1\}$$

neobsahuje žiadnu úsečku, t.j.

$$x, y \in S_1(\mathbf{0}), x \neq y \Rightarrow \forall \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha) y \notin S_1(\mathbf{0}) \quad .$$

3.33. Majme dané LNP: $\mathbb{R}^2$ s normou a2) z úlohy 3.12 bod (a), l^1, l^2 z úlohy 3.12 bod (b), l^∞ z úlohy 3.12 bod (c) a $C(\langle 0,1\rangle)$ s normou z úlohy 3.13 bod (a). Určte, ktoré z týchto LNP sú rýdzo normované (viď úlohu 3.32). Svoje tvrdenia zdôvodnite.

3.34. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a $M \subset X$ je konvexná množina (viď poznámka). Bude aj $\bar{M}$ konvexnou množinou? Svoje tvrdenie zdôvodnite.
pozn.: Podmnožina M LNP $(X, ||.||)$ sa volá konvexná ak platí:

$$\forall x, y \in M, x \neq y, \forall \alpha \in (0,1) : \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in M \quad .$$

3.35. Nech $C(\langle 0,1\rangle)$ je LNP s normou z úlohy 3.13 bod (a). Budú v ňom konvexné nasledovné množiny:
(a) množina všetkých polynómov stupňa k,
(b) množina všetkých polynómov stupňa najviac k,
(c) množina tých spojitých funkcií f, pre ktoré platí:

$$\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t \leq 1 \quad ?$$

Svoje tvrdenia zdôvodnite.

3.36. Uvažujte $C(\langle -1,1\rangle)$ ako LNP s normou z úlohy 3.13 bod (a). Určte, ktoré z nasledovných množín tvoria podpriestory tohoto priestoru:
(a) monotónne funkcie,
(b) párne funkcie,
(c) polynómy,
(d) polynómy stupňa najviac k, $k \in \mathbb{N}_0$,
(e) spojite diferencovateľné funkcie.
pozn.: Nech $(X, ||.||)$ je LNP. Potom lineárny podpriestor $M \subset X$ sa nazýva podpriestor LNP $(X, ||.||)$, ak M je uzavretá množina v LNP $(X, ||.||)$.

3.37. Nech

$$M = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^\infty, x_k \in \mathbb{R} : \quad \sum_{k=1}^\infty x_k = 0 \right\} \quad .$$

Je M podpriestorom (viď poznámku v úlohe 3.36) nasledovných LNP:
(a) l^2 z úlohy 3.12 bod (b) pre $p = 2$,
(b) l^∞ z úlohy 3.12 bod (c)?
Svoje tvrdenia zdôvodnite.

3.38. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, $A \subset X, B \subset X$, A, B sú husté množiny v X (t.j. $\bar{A} = \bar{B} = X$). Je možné aby $A \cap B = \emptyset$? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3.39. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a nech $A \subset X$ je nespočítateľná množina, ktorá má vlastnosť:

$$\exists \epsilon_0 > 0 : \quad \forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow ||x - y|| > \epsilon_0 \quad .$$

Dokážte, že X nie je separabilný priestor.

3.40. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, $A \subset X$ je uzavretá množina. Nech $x \in X : \quad x \notin A$. Dá sa vždy nájsť taký prvok $y \in A$, že[5] $\rho(x, A) = ||x - y||$? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3.41. Nech $(X, ||.||_X)$ a $(Y, ||.||_Y)$ sú LNP, $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie. Vyšetrite platnosť nasledujúcich tvrdení:
(a) obraz $f(A) \subset Y$ otvorenej množiny $A \subset X$ je otvorená množina,
(b) obraz $f(B) \subset Y$ uzavretej množiny $B \subset X$ je uzavretá množina.

3.42. Nech $(\mathbb{R}, ||.||)$ je LNP, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, pre ktorú platí: ak $A \subset \mathbb{R}$ je otvorená množina , tak aj $f(A) \subset \mathbb{R}$ je otvorená množina. Dokážte, že potom je f monotónna funkcia.

3.43. Nech $(X, ||.||_X)$ a $(Y, ||.||_Y)$ sú LNP. Dokážte, že nasledujúce dve vlastnosti sú nutné a postačujúce na to, aby $f : X \to Y$ bolo spojitým zobrazením:
i.) Pre každé $A \subset X$ platí: $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
ii.) Ak $B \subset Y$ je otvorená množina, potom

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \quad f(x) \in B\}$$

je otvorená množina.

3.44. Nech $(X, ||.||_X)$ a $(Y, ||.||_Y)$ sú LNP, $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie X na Y. Nech ďalej $A \subset X$ je taká množina, že $\bar{A} = X$. Dokážte, že potom $\overline{f(A)} = Y$.

3.45. Nech $(X, ||.||)$ je LNP, $A_1, A_2 \subset X$ sú uzavreté množiny také, že $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, na $\mathbb{R}$ uzažujeme ako normu absolútnu hodnotu. Pre $x \in X$ definujme[6]:

$$\phi(x) = \frac{\rho(x, A_1)}{\rho(x, A_1) + \rho(x, A_2)} \quad .$$

Dokážte, nasledujúce tvrdenie: $\phi : X \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, pričom $0 \leq \phi(x) \leq 1$; $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A_1$; $\phi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A_2$.
Je zobrazenie ϕ rovnomerne spojité na X?

[5]Vzdialenosť bodu od množiny v metrickom priestore je definovaná v úlohe 1.10. V tejto úlohe berieme metriku ρ od normy: $\rho(x, y) = ||x - y||$.

[6]Viď poznámka pod čiarou k úlohe 3.40.

3.46. Vyšetrite spojitosť zobrazenia $P : (P(f))(t) = f^2(t)$, ak P je:
(a) zobrazenie z $C(\langle 0,1\rangle)$ do $C(\langle 0,1\rangle)$ s normami z úlohy 3.13 bod (a),
(b) zobrazenie z $C(\langle 0,1\rangle)$ do $C(\langle 0,1\rangle)$ s normami z úlohy 3.13 bod (d) pre $p = 2$,
(c) zobrazenie z $C(\langle 0,1\rangle)$ do $C(\langle 0,1\rangle)$, ak definičný obor zobrazenia P berieme s normou zúlohy 3.13 bod (a) a obor hodnôt s normou z úlohy 3.13 bod (d) pre $p = 2$.
Svoje tvrdenia zdôvodnite.

3.47. Nech $(X, ||.||_X)$, $(Y, ||.||_Y)$ sú LNP a $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ sú spojité zobrazenia. Dokážte, že množina

$$M = \{x \in X : \quad f(x) = g(x)\}$$

je uzavretá v X.

3.48. Nech $(X, ||.||)$ je Banachov priestor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Dokážte platnosť implikácie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{konverguje v} \quad X \quad .$$

3.49. Dokážte, že v konečnerozmernom lineárnom priestore sú každé dve normy ekvivalentné.

3.50. Každý konečnerozmerný LNP je úplný. Dokážte!

3.51. Uvažujte racionálne čísla ($\mathbb{Q}$) ako vektorový priestor na poľom $\mathbb{Q}$ [t.j. nie nad $\mathbb{R}$]. Ak v poli $\mathbb{Q}$ budeme uvažovať miesto absolútnej hodnoty funkciu n_p z úlohy 1.14, tak dvojica $(\mathbb{Q}, n_p)$ je lineárny normovaný priestor. Dokážte!
Ďalej ukážte, že norma n_p nie je ekvivalentná norme od absolútnej hodnoty v $\mathbb{Q}$. Ako toto súvisí s tvrdením v úlohe 3.49?

3.52. LNP $(X, ||.||)$ je unitárny priestor práve vtedy, keď norma spĺňa tzv. štvoruholníkovú rovnosť:

$$\forall x, y \in X \quad ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad ,$$

kde skalárny súčin definujeme ako

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) \quad .$$

Dokážte!

3.53. Ukážte, že norma z úlohy 3.13 bod (a) na množine $C(\langle a, b\rangle)$ nespĺňa štvoruholníkovú rovnosť (viď úlohu 3.52).

3.54. Nech $(\mathcal{H}, \langle ., . \rangle)$ je Hilbertov priestor. Ak $M \subset \mathcal{H}$ tak ortogonálnym doplnkom množiny M voláme množinu

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \quad \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\} \quad .$$

i.) Rozhodnite, či je pravdivé tvrdenie

$$\forall M \subset \mathcal{H} : \quad M \cap M^{\perp} = \emptyset \quad .$$

ii.) Pre $\mathcal{H} \neq \{\mathbf{0}\}$ nájdite takú ohraničenú množinu M, že $M^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.
iii.) Aká je nutná a postačujúca podmienka na to, aby pre $M \subset \mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \neq \{\mathbf{0}\}$) bola množina $M^{\perp}$ ohraničená?

3.55. Nech $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ je Hilbertov priestor. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ je konvergentná postupnosť, t.j. $\exists x \in \mathcal{H}$, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dokážte, že pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí výrok:

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n - x \rangle = 0 \quad .$$

Vedeli by ste zistiť, za akej dodatočnej podmienky na $\mathcal{H}$ platí aj obrátené tvrdenie, t.j. že z uvedeného výroku vyplíva konvergencia postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ k x?

3.56. Nech $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ je Hilbertov priestor[7], $x \in \mathcal{H}$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ je postupnosť, pre ktorú platí:

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x|| \quad \text{a} \quad \forall y \in \mathcal{H} \quad \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n - x \rangle = 0 \quad .$$

Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

3.57. Nech $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ je Hilbertov priestor, $x, y \in \mathcal{H}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$. Nech ďalej $x_n \to x$ a

$$\forall z \in \mathcal{H} \quad \lim_{n\to\infty} \langle z, y_n - y \rangle = 0 \quad .$$

Dokážte, že potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle \quad .$$

3.58. Nech $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ je Hilbertov priestor, ktorý nie je konečnerozmerný. Uvažujte funkciu $\mu : 2^{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$, kde $2^{\mathcal{H}}$ je množina všetkých podmnožín množiny $\mathcal{H}$, definovanú na každej otvorenej guli v $\mathcal{H}$. Nech funkcia μ má nasledovné vlastnosti:
i.) μ je nezáporná.
ii.) Ak gule $B_1, B_2 \subset \mathcal{H}$ sú také, že $B_1 \subset B_2$, tak $\mu(B_1) \leq \mu(B_2)$.
iii.) Ak $x \in \mathcal{H}$ a $M \subset \mathcal{H}$, tak definujeme transláciu množiny M o vektor x vzťahom

$$x + M = \{y \in \mathcal{H} : \quad y - x \in M\} \quad .$$

Ak B je niektorá otvorená guľa v $\mathcal{H}$ a $x \in \mathcal{H}$, potom

$$\mu(x + B) = \mu(B) \quad .$$

iv.) Ak B_i sú disjunktné otvorené gule z $\mathcal{H}$, potom

$$\mu\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i \mu(B_i) \quad .$$

Na základe vyššie uvedených vlastností funkcie μ vypočítajte $\mu(B(1, \mathbf{0}))$, kde

$$B(1, \mathbf{0}) = \{x \in \mathcal{H} : \quad \langle x, x \rangle < 1\} \quad .$$

[7] Ak sa nepovie inák, vždy sa myslí pod normou na Hilbertovom priestore norma od skalárneho súčinu, t.j. pre $x \in \mathcal{H}$:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad .$$

3.59. Ukážte, že pre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω - ohraničená oblasť:
(a) je $L^1(\Omega)$ Banachov priestor s normou $||.||_1$:

$$||f||_1 = \int_\Omega |f(x)|\mathrm{d}x \quad ,$$

(b) je $L^2(\Omega)$ Hilbertov priestor so skalárnym súčinom

$$(f_1, f_2)_{L^2} = \int_\Omega f_1(x) f_2(x)\mathrm{d}x \quad .$$

3.60. Ukážte, že $C(\bar{\Omega})$ je hustá v $L^1(\Omega)$ aj v $L^2(\Omega)$. (Ω - ohraničená oblasť.)

3.61. Ukážte, že $L^1(\Omega)$ aj $L^2(\Omega)$ sú separabilné priestory. (Ω - ohraničená oblasť.)

4 Elementy teórie stability

4.1. Nech Y:
(a)

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ t^4 e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

(b)

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} \\ t^3 e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{-t}{1+t^2} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad ,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, sú riešenia diferenciálneho systému typu $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Rozhodnite, či sú stabilné triviálne riešenia.

4.2. Majme diferenciálnu rovnicu

$$x'(t) = a(t)x(t) \quad \text{pre} \quad t \geq 0 \quad , a \quad \text{spojitá funkcia} \quad .$$

Ukážte, že triviálne riešenie je stabilné podľa Ljapunova práve vtedy, keď

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \int_0^t a(s)\mathrm{d}s < +\infty \quad .$$

4.3. Ukážte, že ak každé riešenie homogénneho systému

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad ,$$

kde $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ a $A(t)$ je $n \times n$ matica koeficientov, je ohraničené pre $t \to +\infty$, potom triviálne riešenie je stabilné podľa Ljapunova.

4.4. Majme diferenciálny systém

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad ,$$

kde $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ a $A(t)$ je $n \times n$ matica koeficientov. Ukážte, že ak existuje neohraničené riešenie systému pre $t \to +\infty$, potom triviálne riešenie je nestabilné.

4.5. Vyšetrite stabilitu riešení $x = x(t)$ nasledújúcej Cauchyho úlohy

$$x' + tx = t, \quad x(0) = 1, \quad t \in \langle 0, \infty) \quad .$$

4.6. Vyšetrite stabilitu riešení $x = x(t)$ nasledujúcich úloh:
(a)

$$3(t-1)x' = x, \quad x(2) = 0, \quad t \in \langle 2, \infty)$$

(b)

$$x' = t - x, \quad x(0) = 1, \quad t \in \langle 0, \infty) \quad .$$

4.7. Vyšetrite stabilitu riešení $x = x(t)$ nasledujúcich úloh:
(a)

$$x' = 4x - t^2 x, \quad x(0) = 0, \quad t \in \langle 0, \infty)$$

(b)

$$2tx' = x - x^3, \quad x(1) = 0, \quad t \in \langle 1, \infty) \quad .$$

4.8. Vyšetrite stabilitu triviálneho riešenia systému obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) - x(t) + x(t)y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) - x^2(t) - y^3(t) \quad . \end{aligned}$$

4.9. Vyšetrite stabilitu triviálneho riešenia systému obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2y^3(t) - x^5(t) \\ y'(t) &= -x(t) - y^3(t) + y^5(t) \quad . \end{aligned}$$

4.10. Vyšetrite stabilitu triviálneho riešenia systému obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) - 3x(t) - x^3(t) \\ y'(t) &= 6x(t) - 2y(t) \quad . \end{aligned}$$

4.11. Vyšetrite stabilitu triviálneho riešenia systému obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2y(t) - x(t) - y^3(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t) \quad . \end{aligned}$$

4.12. Dokážte, že triviálne riešenie nasledujúceho systému obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x'(t) &= -f_1(x) - f_2(y) \\ y'(t) &= f_3(x) - f_4(y) \quad , \end{aligned}$$

kde f_i pre $i = 1, 2, 3, 4$ je spojitá funkcia reálnej premennej, pre ktorú platí $sgn(f_i(z)) = sgn(z)$, je stabilné.

5 Okrajové úlohy pre obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu

5.1. Nájdite hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré okrajová úloha

$$y''(t) + ay(t) = 1 \quad , \quad t \in (0,1) \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

nemá riešenie.

5.2. Vyriešte nasledujúce okrajové úlohy
(a)

$$y''(t) + ky'(t) + ay(t) = 0 \quad , \quad t \in (0,1) \quad y(0) = 0 \quad y(1) = y_1 \quad ,$$

(b)

$$y''(t) = -\frac{G}{y^2(t)} \quad , \quad t \in (0,T) \quad y(0) = H \quad y(T) = 0 \quad ,$$

v závislosti na parametroch $a, k, y_1 \in \mathbb{R}$ (úloha (a)) resp. v závislosti na parametroch $G \in \mathbb{R}$ a $H, T > 0$ (úloha (b)).

5.3. Nájdite všetky riešenia okrajového problému: ($y = y(x), \quad x \in \mathbb{R}$)

$$y'' = \frac{\mathrm{d}V(y)}{\mathrm{d}y}, \qquad V(y) = (y^2 - a^2)^2, \quad a > 0 \quad ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -a, \quad \lim_{x \to \infty} y(x) = a \quad .$$

5.4. Vyriešte okrajovú úlohu ($y = y(x)$, $x \in (0,1)$)

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \quad ,$$

$$y'(0) = 0 \quad y(1) = 1 \quad .$$

5.5. Riešte okrajové úlohy ($y = y(x), \quad x \in (0,1)$)
(a)

$$x^2 y'' - 6y = 0 \quad ,$$

$$y(0) \quad \text{je ohraničená}, \quad y(1) = 2 \quad ,$$

(b)

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad ,$$

$$y(x) = o(x) \quad \text{pre} \quad x \to 0^+, \quad y(1) = 3 \quad .$$

5.6. Nájdite vlastné čísla a vlastné funkcie nasledujúcich okrajových úloh
(a)

$$-v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad , \quad x \in (0,l) \quad v'(0) = v'(l) = 0 \quad ,$$

(b)

$$-v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad , \quad x \in (0,2\pi) \quad v(0) = v(2\pi) \quad v'(0) = v'(2\pi) \quad .$$

5.7. Nájdite vlastné čísla a vlastné funkcie úlohy:

$$x^2 y''(x) = \lambda y(x) \quad , \quad x \in (1, a) \quad y(1) = 0 \quad y(a) = 0 \quad (a > 1) \quad .$$

5.8. Variáciou konštánt vyriešte okrajový problém:

$$y'' + y' = f(x) \quad , \quad x \in (0, 1) \quad y(0) = y'(1) = 0 \quad .$$

5.9. Variáciou konštánt vyriešte okrajový problém:

$$y'' + y' = x(x - 1) \quad , \quad x \in (0, 1) \quad y(0) = 1 \quad y'(1) = 3 \quad .$$

5.10. Vyriešte okrajový problém:

$$y'' + y = x^2 + x + 1 \quad , \quad x \in (0, 1) \quad y(0) = 1 \quad y'(1) = 1 \quad .$$

5.11. Zostrojte Greenovu funkciu úlohy: $(y = y(x), \quad x \in (0, \pi))$

$$y'' + y = f(x), \quad y'(0) = y(\pi) = 0 \quad .$$

5.12. Zostrojte Greenovu funkciu úlohy: $(y = y(x), \quad x \in (1, 3))$

$$x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = y'(3) = 0 \quad .$$

5.13. Nájdite Greenovu funkciu úlohy: $(y = y(x), \quad x \in (0, \pi))$

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(\pi) \quad y'(0) = y'(\pi) \quad .$$

5.14. Nájdite Greenovu funkciu úlohy: $(y = y(x), \quad x \in (0, 1))$

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x) \quad ,$$

$$y(0) \quad \text{je ohraničená}, \quad y(1) = 0 \quad .$$

6 Parciálne diferenciálne rovnice 1. rádu

6.1. Vyriešte nasledovné PDR 1. rádu:
(a) $z = z(x, y)$

$$2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1} \quad ,$$

(b) $z = z(x, y)$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{s podmienkou} \quad z = 2x \quad \mathit{pre} \quad y = 1 \quad .$$

6.2. Vyriešte:

(a) $u = u(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad , \quad \text{s podmienkou} \quad u = yz \quad \text{pre} \quad x = 1 \quad ,$$

(b) $z = z(x, y)$

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x \quad z = z(x, y) \quad \text{prechádza cez} \quad x = 0, z = y^2 \quad ,$$

(c) $z = z(x, y)$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \quad z = z(x, y) \quad \text{prechádza cez} \quad y = x, z = x^2 \quad ,$$

(d) $z = z(x, y)$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2 \quad z = z(x, y) \quad \text{prechádza cez} \quad y = 1, z = x^2 \quad .$$

7 Lineárne parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu

7.1. Klasifikujte nasledovné LPDR 2. rádu:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ,$$

(b)

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ,$$

(c)

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ,$$

(d)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ,$$

(e)

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad ,$$

(f)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ,$$

(g)

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial w} - \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial w} - 6\frac{\partial u}{\partial w} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad .$$

7.2. Nech funkcia $u = u(x,t)$, kde $(x,t) \in (-\infty,\infty) \times (0,\infty)$, je riešením diferenciálnej rovnice

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad .$$

Dokážte, že potom aj funkcie

$$v_1(x,t) = u\left(\frac{x}{x^2-t^2}, \frac{t}{x^2-t^2}\right) \quad ,$$

$$v_2(x,t) = xu_x(x,t) + tu_t(x,t) \quad ,$$

$$v_3(x,t) = u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t) \quad ,$$

sú riešeniami tejto diferenciálnej rovnice všade tam, kde sú definované.

7.3. Kmitanie polpriamky je popísané diferenciálnou rovnicou

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \quad a > 0 \quad .$$

Nájdite riešenie tejto rovnice spolu s podmienkami:
(a)

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x < \infty, \quad \varphi(0) = \psi(0) = 0 \quad ,$$

(b)

$$u_x(0,t) = 0 \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < \infty \quad ,$$

kde φ a ψ sú zadané spojité funkcie premennej x.

7.4. Kmitanie polpriamky je popísané diferenciálnou rovnicou

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \quad a > 0 \quad ,$$

a F je zadaná spojitá funkcia. Nájdite riešenie tejto rovnice spolu s podmienkami:
(a)

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad ,$$

(b)

$$u_x(0,t) = 0 \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad ,$$

(c)

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x < \infty \quad \varphi(0) = \psi(0) = 0 \quad ,$$

(d)

$$u_x(0,t) = 0 \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < \infty \quad ,$$

kde φ a ψ sú zadané spojité funkcie premennej x.

7.5. Kmitanie polpriamky je popísané diferenciálnou rovnicou

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \quad a > 0 \quad .$$

Nájdite riešenie tejto rovnice spolu s podmienkami:
(a)

$$u(0,t) = f(t) \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad f(0) = 0 \quad 0 \le x < \infty \quad ,$$

(b)

$$u_x(0,t) = g(t) \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad ,$$

(c)

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = s(t), \quad h > 0, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad .$$

f, g a s sú zadané spojité funkcie premennej t.

7.6. Vyriešte úlohy o kmitaní polpriamky:
(a)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \quad a > 0$$

$$u(0,t) = f(t) \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad f(0) = \varphi(0) = \psi(0) = 0 \quad ,$$

(b)

$$u_x(0,t) = g(t) \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad .$$

F, f, g, φ, ψ sú zadané spojité funkcie.

Vyriešte Fourierovou metódou úlohy 7.7 až 7.19.

7.7. (a)

$$a^2 u_{xx} + xt = u_{tt}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = \sin(x) \quad u_t(x,0) = \cos(x) \quad u(0,t) = t \quad u(1,t) = t^2 + \sin(1) \quad ,$$

(b)

$$a^2 u_{xx} - x^2(1-t) = u_t, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = e^x \quad u(0,t) = 1 \quad u(1,t) = e^{-t+1} \quad ,$$

(c)

$$u_{xx} + \sin(\pi x) = u_t, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = x \quad u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = e^{-t} \quad .$$

7.8.

$$u_{xx} + x^2 t = u_{tt}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad .$$

7.9.

$$u_{xx} + t\sin(x) = u_{tt}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = 2 \quad u_t(x,0) = 0 \quad u(0,t) = u(1,t) = 2 \quad .$$

7.10.

$$u_{xx} + x\sin(t) = u_t, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = 1 \quad u(0,t) = u(1,t) = 1 \quad .$$

7.11.

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad (x,t) \in (0,\pi/2) \times (0,T), \quad T > 0$$

$$u(x,0) = \sin(x) \quad u_t(x,0) = x\cos(x) \quad u(0,t) = 0 \quad u(\pi/2,t) = 1 \quad .$$

7.12.

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$$

$$u(0,t) = t \quad u_x(\pi,t) = 1 \quad u(x,0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad u_t(x,0) = 1 \quad .$$

7.13.

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$$

$$u(0,t) = e^{-t} \quad u(\pi,t) = t \quad u(x,0) = \cos(x) \quad u_t(x,0) = 1 \quad .$$

7.14.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty), \quad l, a > 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad u_x(l,t) = Ae^{-t}, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \frac{Aa\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{l}{a}\right)} \quad u_t(x,0) = -\frac{Aa\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{l}{a}\right)} \quad .$$

7.15.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2\sin(2t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty), \quad a, l > 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad u_x(l,t) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{2l}{a}\right)\sin(2t) \quad u(x,0) = 0 \quad u_t(x,0) = -2\cos\left(\frac{2x}{a}\right) \quad .$$

7.16. $(u = u(x,y,t))$

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x,y,t) \in (0,l_x) \times (0,l_y) \times (0,\infty), \quad a > 0 \quad l_x > 0, \quad l_y > 0$$

$$u(0,y,t) = u(l_x,y,t) = 0 \quad u(x,0,t) = u(x,l_y,t) = 0$$

$$u(x,y,0) = 0 \quad u_t(x,y,0) = v(x,y) \quad .$$

7.17.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty), \quad a > 0, \quad l > 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0$$
$$u(x,0) = \Phi(x) \quad .$$

7.18.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty), \quad a > 0, \quad l > 0$$

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0 \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0$$
$$u(x,0) = U, \quad U \quad \text{je konštanta} \quad .$$

7.19. $(u = u(x,y,z,t))$

$$u_t = a^2 \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + \beta u, \quad t > 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad ,$$

kde $a, \beta, R > 0$ a

$$u(x,y,z,0) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \equiv f(r), \quad f(r) \geq 0 \quad \forall r: \quad 0 \leq r \leq R, \quad f(R) = 0 \quad ,$$

kde f je spojitá funkcia a
$$u(x,y,z,t)|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = 0 \quad .$$

Nájdite (pri fixných parametroch a, β) také $R_0 > 0$, že pre každé $R > R_0$ bude pre riešenie uvedenej okrajovej úlohy platiť

$$\lim_{t\to\infty} u(x,y,z,t) = +\infty \quad \forall (x,y,z): \quad x^2 + y^2 + z^2 < R^2$$

a pre každé fixné $T > 0$ bude riešenie $u = u(x,y,z,t)$ pre $t \in (0,T)$ ohraničené.

7.20. Dokážte, že funkcia u definovaná vzťahom

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \mathrm{d}y, \quad t > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

je riešením diferenciálnej rovnice
$$u_{xx} - u_t = 0 \quad ,$$

ktoré vyhovuje počiatočnej podmienke

$$u(x,0) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

7.21. Dokážte, že funkcia

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau) \mathrm{d}\tau, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad ,$$

kde

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}} G(y,\tau)\mathrm{d}y, \quad t > \tau \quad ,$$

kde G je spojitá ohraničená funkcia definovaná na rovine, je riešením diferenciálnej rovnice

$$u_{xx} - u_t = -G(x,t)$$

a vyhovuje podmienke

$$u(x,0) = 0 \quad .$$

7.22. Nech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a $t > 0$. Dokážte, že funkcia

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_D \frac{\psi(v,w)\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{t^2-(v-x)^2-(w-y)^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_D \frac{\varphi(v,w)\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{t^2-(v-x)^2-(w-y)^2}} \quad ,$$

kde D je kruh: $(x-v)^2 + (y-w)^2 \leq t^2$, je riešením diferenciálnej rovnice

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \quad ,$$

ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y) \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \quad .$$