

Aplikovaná matematika

text a úlohy k prednáške pre študentov PriF UK

RNDr. Michal Demetrian, PhD.¹
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky
FMFI UK

17. septembra 2007

¹e-mail: demetrian@fmph.uniba.sk

Obsah

1	Diferenciálny a integrálny počet funkcií jednej reálnej premennej (opakovanie)	3
1.1	Určitý (Newtonov) integrál	6
2	Nevlastný integrál	15
2.1	Kritériá konverencie pre nevlastné integrály	19
3	Elementy teórie pravdepodobnosti	28
3.1	Náhodná premenná, rozdelenie pravdepodobnosti, stredné hodnoty, disperzia . . .	28
3.2	Transformácia náhodnej premennej	38
3.3	Funkcie viacerých náhodných premenných	41
4	Obyčajné diferenciálne rovnice	45
4.1	Úvod	45
4.1.1	Pôvod diferenciálnych rovníc	47
4.2	Elementárny prípad	48
4.3	Diferenciálna rovnica prvého rádu v separovanom tvare	54
4.4	Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu	57
4.5	Elementárna numerická metóda riešenia diferenciálnej rovnice prvého rádu	60
4.6	Riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc pomocou matematického software . . .	63
4.6.1	Príklady na nájdenie všeobecného riešenia obyčajnej diferenciálnej rovnice	63
4.6.2	Príklady na nájdenie riešenia počiatočnej úlohy (riešenia v tvare "vzorca")	65
4.6.3	Príklady na vyriešenie počiatočnej úlohy - bez podmienky na riešenie v tvare vzorca	67
4.7	Homogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami	70
4.8	Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koefi- cientami - riešenie metódou variácie konštant	73
4.9	Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koefi- cientami so špeciálnou pravou stranou - riešenie metódou neurčitých koeficientov .	79
4.10	Sústavy dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koefi- cientami	83

5	Elementy teórie funkcie dvoch premenných	90
5.1	Definičný obor, graf funkcie 2 premenných	90
5.2	Okolie bodu roviny, lokálne extrémny funkcie dvoch premenných	98
5.3	Postupnosť bodov roviny, limita postupnosti	99
5.4	Spojitosť a limita funkcie dvoch premenných	100
5.5	Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných	103
5.6	Vyšetrovanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných pomocou parciálnych derivácií	106
5.7	Dotyková rovina ku grafu funkcie 2 premenných	113

Kapitola 1

Diferenciálny a integrálny počet funkcií jednej reálnej premennej (opakovanie)

Ako predpoklad k ďalšiemu štúdiu je znalosť kalkulu obsahujúceho výpočet derivácií funkcií jednej reálnej premennej, jednoduché aplikácie derivácie pri hľadaní lokálnych extrémov funkcií a elementárne metódy hľadania neurčitého integrálu. Najprv uvedieme pomocné tabuľky derivácií a integrálov elementárnych funkcií a niektoré pravidlá:

- derivácie

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0$	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- integrály (primitívne funkcie)

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$const$	$const \cdot x + C$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

- platia vzťahy pre derivovanie (predpoklady nevypisujeme):

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ [f(g(x))]' &= f'_g(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

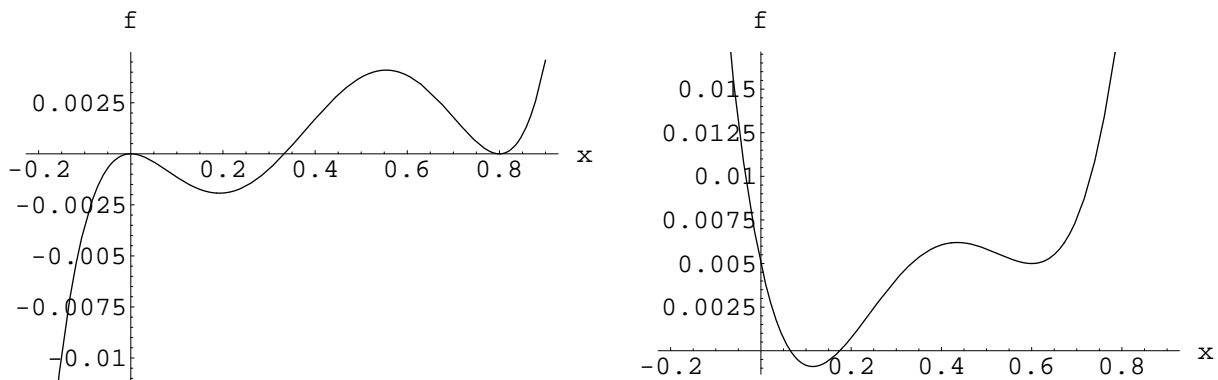
- platia vzťahy pre integrovanie (predpoklady nevypisujeme):

$$\begin{aligned} \int u'(x)v(x)dx &= uv - \int u(x)v'(x)dx \\ \int f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} x = x(y) \\ dx = x'(y)dy \end{array} \right| = \int f(x(y))x'(y)dy \end{aligned}$$

1.1 Vypočítajte derivácie funkcií

a) $f(x) = x \sin(x)$	b) $f(x) = x \sin(x) \cos(x)$	c) $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$
d) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$	e) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	f) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
g) $f(x) = \sin(3+x)$	h) $f(x) = \cos(x^2 - \sin(x))$	i) $f(x) = \ln(x+x^3)$
j) $f(x) = \tan(x^2)$	k) $f(x) = \exp(\sin(x))$	l) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}$
m) $f(x) = x \arctan(x)$	n) $f(x) = \arcsin(x^3)$	o) $\sin(\ln(x))$
p) $f(x) = \sqrt{x} \cos(x)$	q) $f(x) = x^{1/3} \arctan(\sqrt{x})$	r) $2^x \sin(x)$
s) $f(x) = 3^{\sin(x)}$	t) $f(x) = \sin(e^x)$	u) $\sqrt[3]{e^x + x + 1}$
v) $f(x) = (x^3 + x) \ln(x)$	w) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + \sin(x)}}$	x) $f(x) = \frac{x}{\tan(x)}$

1.2 Na grafoch 1.1 sú zobrazené isté funkcie; zistite (s presnosťou umožnenou samotným grafom) na ktorých intervaloch majú zobrazené funkcie: a.) kladnú; b.) zápornú deriváciu.



Obrázok 1.1:

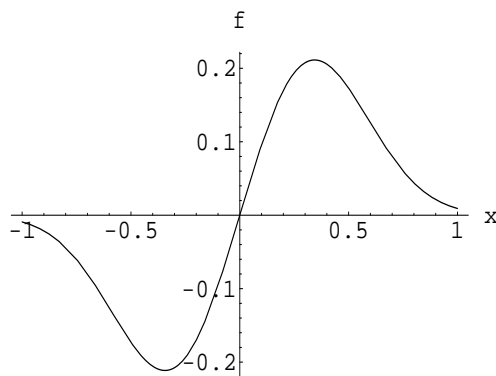
1.3 Nájdite lokálne extrémny a inflexné body funkcií

a) $f(x) = x^3 - x$	b) $f(x) = \ln(x^4 + 4)$	c) $f(x) = x^2 + 4x - 10$
d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	e) $f(x) = x \exp(-x)$	f) $f(x) = \exp(-x^2)$

1.4 Na obrázku 1.2 je znázornený priebeh jednej z funkcií:

$$f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{1+x^4}, \quad f_2(x) = \frac{x^2 e^{-x^2}}{2 + \cos(x)}, \quad f_3(x) = \frac{x e^{-4x^2}}{1+x^4}, \quad f_4(x) = \frac{x}{x^2 - \frac{1}{2}}.$$

Na základe jednoduchých úvah o priebehu funkcie zistite, o ktorú z týchto funkcií sa jedná.



Obrázok 1.2:

1.5 Vypočítajte nasledovné neurčité integrály

$$\begin{array}{lll}
 a) \int (x + 3x^4 - x^7) dx & b) \int (\sin(x) - \cos(x)) dx & c) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\
 d) \int e^{-x} dx & e) \int \frac{1}{1+x} dx & f) \int \frac{1}{3+x^2} dx \\
 g) \int \cos^2(x) dx & h) \int x \cos(x) dx & i) \int x e^{-x^2} dx \\
 j) \int \ln(x^2) dx & k) \int x \arctan(x) dx & l) \int x \ln(x) dx
 \end{array}$$

1.1 Určitý (Newtonov) integrál

- Uvažujeme o funkcii $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitej (čo už automaticky znamená aj ohraničenej) poprípade o funkcii ohraničenej s konečne veľa bodmi nespojitosti ako je napríklad funkcia f definovaná v intervale $[-1, 1]$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [-1, 0), \end{cases}$$

ktorá má jeden bod nespojitosti (menovite 0).

- Určitým integrálom funkcie f v intervale $[a, b]$, píšeme

$$\int_a^b f(x) dx$$

voláme číslo, ktoré je plochou (znamienkovou!) uzavretou medzi grafom funkcie f a osou x . (Toto je samozrejme len voľná definícia)

- Základnou metódou výpočtu určitého integrálu je tzv. Newton-Leibnitzov vzorec: nech platí rovnosť (o funkcii $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sa predpokladá že je (po častiach) spojitá)

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

potom

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Toto sa zapisuje zvyčajne takto:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

- Elementárne vlastnosti určitého integrálu:

– ak $f(x) \geq 0$ tak

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

a dôsledok: ak $f(x) \leq g(x)$ tak

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

– linearita

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$$

– aditivita voči intervalu: ak $a < c < b$ tak potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

–

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

– ak f je definovaná v intervale $[-a, a]$, $a > 0$ a je párna, tak

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

– ak f je definovaná v intervale $[-a, a]$, $a > 0$ a je nepárna, tak

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

1.6 Vypočítajte pomocou Newton-Leibnitzovho vzorca určité integrály

a) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$

b) $\int_0^1 \arctan(x)dx$

Riešenie:

a) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x)\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} - (\ln(2) - \ln(1)) = \frac{3}{2} - \ln(2)$

b) $\int_0^1 \arctan(x)dx = \left[x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx\right]_0^1 = \arctan(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$
 $\frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$

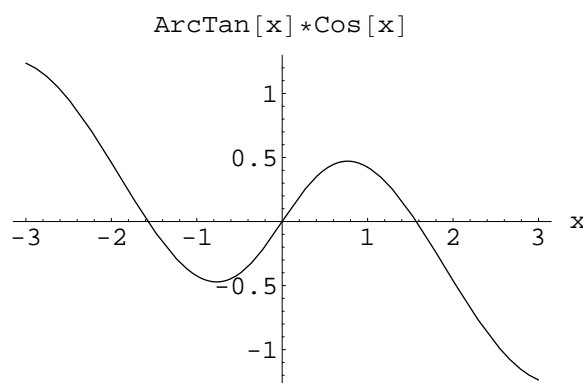
1.7 Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{-3}^3 \arctan(x) \cos(x) dx.$$

Riešenie: snaha použiť na výpočet N-L vzorec v tomto prípade zlyháva (možno sa presvedčiť použitím matematického moderného software); avšak použitím jednoduchej úvahy: funkcia $\arctan(x) \cos(x)$ je NEPÁRNA, preto podľa vlastností určitého integrálu je integrál z nej v intervale $[-3, 3]$ rovný NULE:

$$\int_{-3}^3 \arctan(x) \cos(x) dx = 0.$$

Graf funkcie $\arctan(x) \cos(x)$ v intervale $[-3, 3]$ je znázornený na obrázku 1.3.



Obrázok 1.3:

1.8 Vypočítajte pomocou Newton-Leibnitzovho vzorca nasledovné určité integrály

a) $\int_2^5 x^3 dx$	b) $\int_{-1}^2 (3x^2 - x^3) dx$	c) $\int_{-1}^1 \arctan(x) dx$
d) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$	e) $\int_0^{2\pi} (1 - \sin(x)) dx$	f) $\int_0^1 e^x dx$
g) $\int_{-1}^1 x e^{-x} dx$	h) $\int_0^\pi x \cos(x) dx$	i) $\int_1^2 x \ln(x) dx$
j) $\int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$	k) $\int_0^\pi x \sin(x) dx$	l) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
m) $\int_1^2 \ln(x) dx$	n) $\int_1^2 x \ln(x) dx$	o) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

1.9 Nech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia (po častiach spojitá ohraničená funkcia). Strednou hodnotou tejto funkcie na intervale $[a, b]$ voláme číslo

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Vypočítajte stredné hodnoty zadaných funkcií na daných intervaloch:

$$a) f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

$$b) f(x) = \cos(x), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$c) f(x) = \sin(x) \cos(x), \quad x \in [0, \pi]$$

$$d) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$e) f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$f) f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad x \in [0, 1]$$

1.10 Teleso sa pohybovalo v odporujúcom prostredí tak, že v intervale času $[0s, 3s]$ bola jeho rýchlosť daná formulou (v m/s)

$$v(t) = t(3 - t).$$

Vypočítajte dráhu, ktorú teleso prešlo a jeho strednú rýchlosť.

1.11 Porovnajte čísla

$$\int_0^\pi \sin^{2004}(x) dx \quad \text{a} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2005}(x) dx.$$

Návod: v druhom integrále urobte zmenu premennej $x \mapsto y = x + \pi/2$.

1.12 Vypočítajte obsah plochy uzavretej medzi krivkami:

(i)

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = 1 - x^2.$$

(ii)

$$y_1(x) = x^3, \quad y_2(x) = x.$$

(iii)

$$y_1(x) = |x|, \quad y_2(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Zadané plochy aj znázornite graficky.

Niektoré geometrické aplikácie určitého integrálu:

- Nech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitú prvú deriváciu. Potom dĺžka krivky, ktorá je grafom funkcie f je daná vzťahom

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Nech je krivka v rovine zadaná parametrickým vyjadrením

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b],$$

kde funkcie ϕ , ψ majú spojitú prvú deriváciu. Potom dĺžka tejto krivky je daná vzťahom

$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

- Objem telesa, ktoré vzniká rotáciou krivky, ktorá je grafom spojitej funkcie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, okolo osi x , je daný vzťahom

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- Obsah rotačnej plochy vznikajúcej rotáciou grafu funkcie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá má spojitú prvú deriváciu, okolo osi x je daný vzťahom

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

1.13 Vypočítajte obvod kružnice polomeru R .

Riešenie: vezmime kartézské súradnice $[x, y]$, potom rovnica kružnice polomeru R so stredom v počiatku súradníc je

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Vyjadríme si $y = y(x)$ pre osminu kružnice pre ktorú je $0 \leq x \leq R/\sqrt{2}$, $y \geq 0$:

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [0, R/\sqrt{2}].$$

Takže

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

A podľa vyššie uvedeného vzťahu pre dĺžku krivky máme obvod kružnice (pracujeme s jej osminou):

$$\begin{aligned} O &= 8 \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 8 \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 8 \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 8R \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{R^2 - x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = R \sin(u) \\ dx = R \cos(u) du \end{array} \right| = 8R \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{R^2 \cos^2(u)}} R \cos(u) du = \\ &= 8R \int_0^{\pi/4} du = 8R \frac{\pi}{4} = 2\pi R. \end{aligned}$$

1.14 Kružnicu polomeru R možno zadať aj v polárnych súradniciach:

$$x = R \cos(\varphi), \quad y = R \sin(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Vypočítajte obvod kružnice pomocou tohoto zápisu kružnice.

Riešenie: ide o aplikáciu vzťahu na výpočet dĺžky krivky zadanej parametricky, kde parametrom je φ . Menovite máme:

$$O = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(\varphi) + R^2 \cos^2(\varphi)} d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R.$$

1.15 Vypočítajte dĺžku krivky zadanej parametricky:

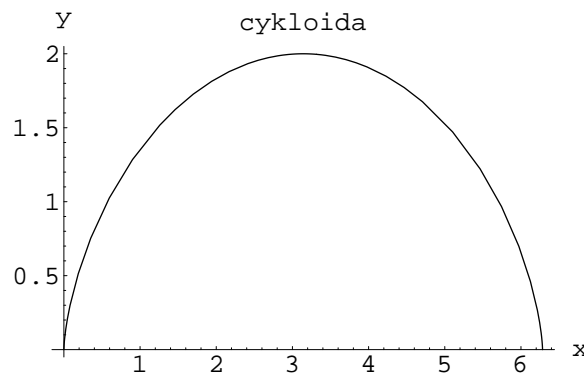
$$x(t) = t - \sin(t), \quad y(t) = 1 - \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Táto krivka je znázornená na obrázku 1.4.

Riešenie: potrebujeme:

$$x'(t) = 1 - \cos(t), \quad y'(t) = \sin(t).$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)} dt = \left| \sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t) \right| = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4 \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 8. \end{aligned}$$



Obrázok 1.4:

1.16 Vypočítajte objem gule polomeru R .

Riešenie: guľa polomeru R vzniká zrejme ako teleso obalené plochou, ktorá vznikne rotáciou hornej polkružnice polomeru R (so stredom v počiatku súradníc) okolo osi x . Rovnica tejto hornej polkružnice ale je:

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R].$$

Takže objem gule je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R f^2(x) dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = |\text{párnosť}| = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=R} = \\ &= 2\pi R^3 \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

1.17 Vypočítajte objem dvojosého rotačného elipsoidu s hlavnou osou dĺžky a a vedľajšou osou dĺžky b .

Riešenie: takéto teleso vzniká rotáciou elipsy, ktorá má poloos a pozdĺž osy x a poloos b pozdĺž osy y okolo osy x . Elipsa má stred v počiatku súradníc. Rovnica takej elipsy je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

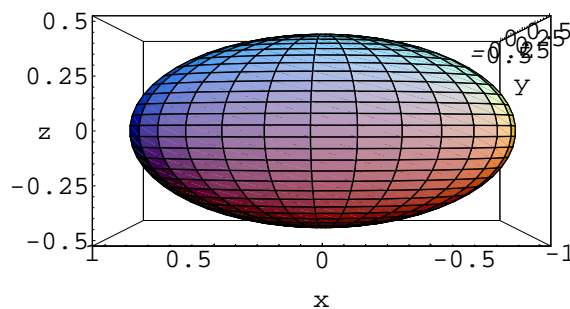
Takže pre hornú polelipsu máme:

$$y = f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [-a, a].$$

A teda objem takto vzniknutého telesa je

$$V = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = |\text{párnosť}| = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Elipsoid s $a = 1$ a $b = 1/2$ je znázornený na obrázku 1.5.



Obrázok 1.5:

1.18 Vypočítajte objem telesa ktoré vzniká (jeho povrch vzniká) rotáciou krivky:

$$|x|^{1/2} + |y|^{1/2} = 1$$

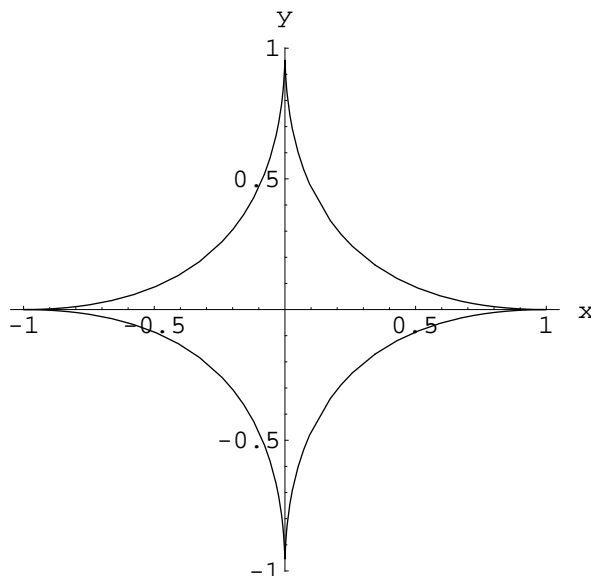
okolo osi x . Krivka je znázornená na obrázku 1.6.

Riešenie: vyjadríme si y ako funkciu x :

$$y = f(x) = \left(1 - \sqrt{|x|}\right)^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Potom podľa vzťahu pre objem máme:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left(1 - \sqrt{|x|}\right)^4 dx = 2\pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^4 dx = 2\pi \int_0^1 (1 - 4x^{1/2} + 6x - 4x^{3/2} + x^2) dx = \\ &= 2\pi \left[x - 4\frac{2}{3}x^{3/2} + 6\frac{1}{2}x^2 - 4\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{15}\pi. \end{aligned}$$



Obrázok 1.6:

1.19 Vypočítajte povrch gule polomeru R .

Riešenie: ako sme už písali v príklade 1.16 takáto guľa vzniká rotáciou hornej polkružnice polomeru R so stredom v počiatku, preto je:

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$$

a povrch je

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 4\pi R^2.$$

1.20 Vypočítajte obsah povrchu rotačného paraboloidu, ktorý vzniká rotáciou paraboly:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, a], \quad a > 0$$

okolo osi x .

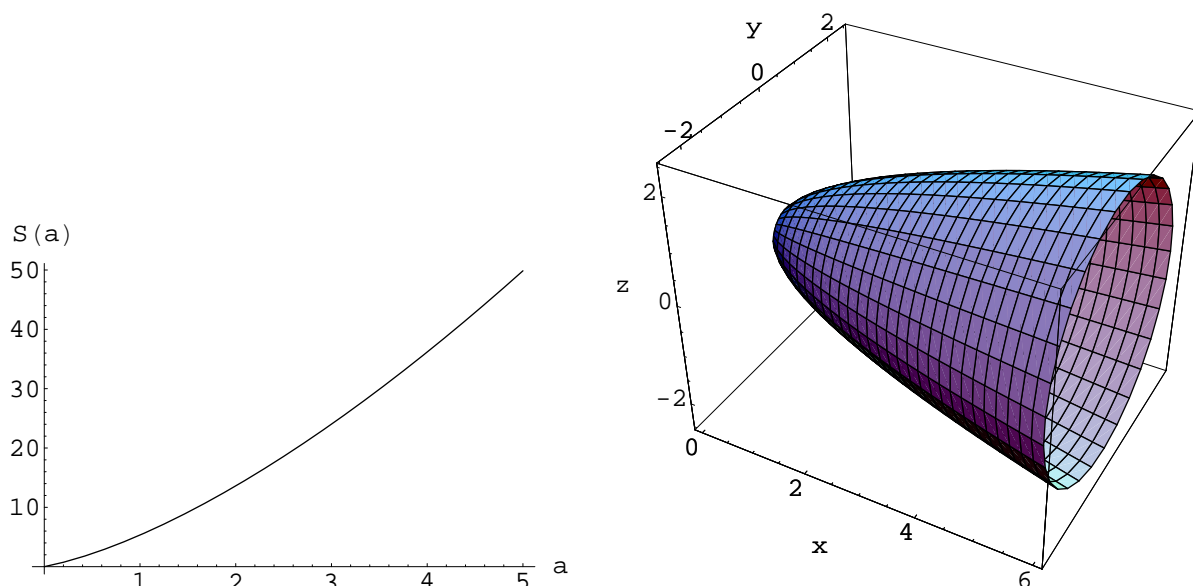
Riešenie: priamim dosadením do vzorca máme:

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \int_0^a \sqrt{4x + 1} dx = \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} [(4x + 1)^{3/2}]_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi}{6} [(4a + 1)^{3/2} - 1].$$

Závislosť S od a a samotný paraboloid sú znázornené na obrázku 1.7.

1.21 Vypočítajte dĺžku krivky, ktorá je grafom funkcie

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$



Obrázok 1.7: V ľavo: závislosť $S(a)$ obsahu paraboloidu od jeho výšky z príkladu 1.20 a v pravo: náčrt samotného paraboloidu.

1.22 Vypočítajte dĺžku krivky danej parametrickým vyjadrením

$$x = t, \quad y = t^{3/2}, \quad t \in [0, 1].$$

1.23 Vypočítajte objemy telies vzniknutých rotáciou kriviek $(x, f(x))$ okolo osy x ak funkcie f sú:

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$

b) $f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi]$

c) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \quad x \in [-2, 2]$

d) $f(x) = x(1 - x), \quad x \in [0, 1]$

e) $f(x) = 1 - x, \quad x \in [0, 1]$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$

g) $f(x) = \sqrt{x \cos(x)}, \quad x \in [0, \pi/2]$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in [0, 1]$

i) $f(x) = \ln(x), \quad x \in [1, 2]$

j) $f(x) = e^x - 1, \quad x \in [0, 1]$

1.24 Nájdite obsah povrchu kužeľa s výškou h a polomerom podstavy R .

1.25 Nájdite objem kužeľa s výškou h a polomerom podstavy R .

1.26 Uvažujme teleso tvaru gule polomeru R . Nech jeho hustota je daná funkciou

$$\rho(r) = kr^\alpha,$$

kde $\alpha > -3$. Hmotnosť tohoto telesa je potom daná vzťahom

$$M = 4\pi k \int_0^R r^{\alpha+2} dr.$$

Nájdite to α , pre ktoré je táto hmotnosť najväčšia.

Kapitola 2

Nevlastný integrál

Nevlastný integrál prvého druhu je formálne jeden z nasledujúcich objektov:

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

kde $a \in \mathbb{R}$. Zmysel týmto objektom dáva definícia:

- Nech $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená a nech pre každé $A > a$ existuje

$$\int_a^A f(x)dx.$$

Potom ak existuje konečná limita

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Hovoríme aj, že integrál

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

konverguje. Inak hovoríme, že integrál nekonverguje alebo aj že diverguje.

Podobne ak $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená a pre každé $A < a$ existuje integrál

$$\int_A^a f(x)dx,$$

tak potom hovoríme, že konverguje nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx,$$

ak existuje konečná limita

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx \equiv \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$

Posledný prípad nevlastného integrálu prvého druhu:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

sa zavádza pomocou predchádzajúcich dvoch takto: predpokladáme, že $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená a vezmem ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$. Ak existujú nevlastné integrály

$$\int_c^\infty f(x)dx \quad \int_{-\infty}^c f(x)dx$$

tak existuje aj

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_c^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx.$$

Ak niektorá z uvedených limít neexistuje tak hovoríme, že integrál nekonverguje (diverguje).

Uvedieme nejaké príklady:

2.1 Vypočítajme resp. zistíme priamim výpočtom, či existujú nevlastné integrály:

$$a) \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \quad b) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \quad c) \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^3}dx$$

Riešenie:

a) nech $A > 1$ potom treba pozrieť na

$$\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}.$$

No ale

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 1.$$

Takže

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

b) zvolíme $c = 0$, to znamená že treba preskúmať, či existujú integrály

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$$

V prvom rade si všimnime, že ak v druhom integrále urobíme zámenu $x \mapsto -x$ tak dostaneme presne prvý integrál - podintegrálna funkcia $1/(1+x^2)$ je párna. Preto ak integrály existujú, tak

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Takže stačí zrátať

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan(A) = \frac{\pi}{2}.$$

Preto

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2 \frac{\pi}{2} = \pi.$$

c) pozrime na posledný príklad, nech $A > 0$ potom

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{x^2}{1+x^3}dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \ln(1+x^3) \right]_0^A = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln(1+A^3) = +\infty.$$

Takže uvedený integrál nekonverguje (hovoríme aj, že diverguje).

2.2 Preskúmajme nevlastný integrál

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx$$

v závislosti na parametre α .

Riešenie: vypočítame najskôr

$$\int_1^A x^{\alpha} dx$$

a to pre každé $A > 1$. Máme 2 situácie:

- $\alpha = -1$:

$$\int_1^A x^{-1} dx = \ln(A)$$

v tomto prípade je zjavne:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \ln(A) = \infty$$

a teda uvedený integrál **diverguje**

- $\alpha \neq -1$:

$$\int_1^A x^{\alpha} = \frac{A^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}$$

v tomto prípade nastávajú 2 situácie:

- ak $\alpha < -1$ tak potom

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha+1}$$

a teda uvedený integrál **konverguje**

- ak $\alpha > -1$ tak potom

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \infty$$

a teda uvedený integrál **diverguje**

Celkovo uzatvárame, že zadaný integrál konverguje pre $\alpha < -1$ a diverguje pre $\alpha \geq -1$.

Zavedieme nevlastný integrál druhého druhu:

- Nech $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neohraničená v okolí bodu a , napríklad

$$f(x) = \frac{x}{3-x}$$

pre $x \in (3, 4]$, potom hovoríme, že existuje (konverguje) nevlastný integrál

$$\int_a^b f(x) dx$$

ak existuje konečná limita:

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Inak hovoríme, že nevlastný integrál (druhého druhu) diverguje. Podobne zavádzame nevlastný integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

v prípade, že funkcia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je neohraničená v okolí bodu b :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x)dx.$$

2.3 Zistíme, či konvergujú integrály a ak áno vypočítajme ich:

$$a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad b) \int_0^1 \ln(x) dx \quad c) \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Riešenie:

a) zadaná funkcia je neohraničená v okolí bodu 0, preto skúmame:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [2x^{1/2}]_\alpha^1 = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (1 - \alpha^{1/2}) = 2,$$

takže uvedený integrál konverguje a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

b) zadaná funkcia je zase neohraničená v okolí bodu 0 preto skúmame

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \ln(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[x \ln(x) - \int 1 dx \right]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [-x \ln(x) - x]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (-1 - \alpha \ln(\alpha) - \alpha) = -1.$$

Takže zadaný integrál konverguje a platí

$$\int_0^1 \ln(x) dx = -1.$$

c) Tretia funkcia je tiež neohraničená v okolí bodu 0 takže znovu treba preskúmať existenciu limity

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_\alpha^1 = -\frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \ln^2(\alpha) = -\infty.$$

Takže tento integrál nekonverguje.

2.4 Preskúmajte konvergenciu nevlastného integrálu druhého druhu

$$\int_0^1 x^\alpha dx$$

v závislosti na parametri α .

2.5 Vypočítajte (ak existujú!) nevlastné integrály

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx & b) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx & c) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \\ d) \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx & e) \int_0^1 \ln^2(x) dx & f) \int_1^2 \frac{1}{1-x} dx \\ g) \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx & h) \int_0^1 \frac{x}{1-x^2} dx & i) \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx \end{array}$$

2.6 Nech $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, vypočítajte integrál

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Riešenie: vypočítame najprv hodnotu integrálu I_0 :

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1.$$

Ďalej využijeme integrovanie per-partes:

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx \right]_0^{\infty} = n I_{n-1}.$$

Takto sme odvodili rekurentný vzťah (s počiatočnou podmienkou):

$$I_0 = 1, \quad I_n = n I_{n-1}.$$

To znamená, že:

$$I_n = n! .$$

2.1 Kritériá konvergencie pre nevlastné integrály

V predchádzajúcom texte sme odpovedali na otázku o (ne)konvergencii nevlastného integrálu (prvého aj druhého druhu) tak, že sme priamo počítali definičnú limitu. Toto ale je v podstate len okrajový spôsob odpovedania na takú otázku. Teraz sa trochu pozrieme na metódy, ktoré nevyžadujú použitie Newton-Leibnitzovho vzorca.

V prvom rade sformulujeme tzv. **vetu o absolútnej konvergencii**:

- Nech funkcia f je (po častiach) spojitá na $[a, \infty)$ a nech konverguje nevlastný integrál

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx.$$

Potom konverguje aj integrál

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Ďalej budeme pre určitost' uvažovať nevlastné integrály prvého druhu:¹

$$(a) \int_0^{\infty} f(x)dx \qquad (b) \int_0^{\infty} g(x)dx$$

Predpokladajme, že funkcie f a g sú spojité (po častiach spojité) v intervale $[0, \infty)$. Platí séria nasledovných tvrdení (tzv. **porovnávacie kritérium**):

- nech funkcie f a g sú nezáporné v intervale $[0, \infty)$ a nech platí nerovnosť: $f(x) \leq g(x)$ tiež v intervale $[0, \infty)$, potom:
 - ak integrál (b) konverguje, tak konverguje aj integrál (a)
 - ak integrál (a) diverguje, tak diverguje aj integrál (b)
- nech funkcie f a g sú nezáporné v intervale $[0, \infty)$ a nech

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c,$$

potom ak:

- $0 < c < \infty$ tak integrály (a) a (b) konvergujú (divergujú) súčasne - hovoríme, že majú rovnaký charakter
- $c = 0$ a integrál (b) konverguje, tak konverguje aj integrál (a)
- $c = \infty$ a integrál (b) diverguje, tak diverguje aj integrál (a)

Analogické kritériá možno sformulovať aj pre nevlastné integrály druhého druhu.

2.7 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{2+x^4} dx.$$

Riešenie: Singulárnym bodom uvedeného integrálu je $+\infty$. Pre veľké hodnoty x (teda pre $x \gg 1$) máme: $2+x^4 \approx x^4$, a teda aj:

$$\frac{x^3}{2+x^4} \approx \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x},$$

čo presne znamená, že

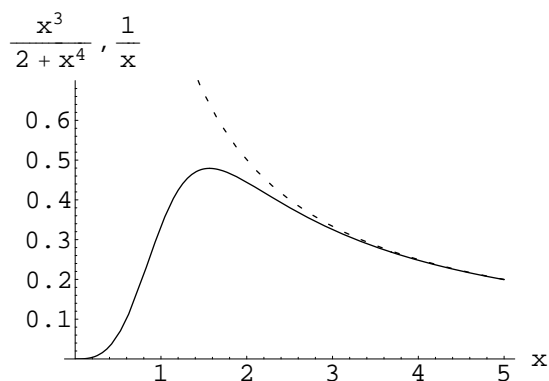
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{2+x^4}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

To znamená, že

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{2+x^4} dx \sim \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx,$$

kde druhý integrál diverguje a preto diverguje aj zadaný integrál. Spoločný graf zadanej funkcie a porovnávacej funkcie $1/x$ je na obrázku 2.1.

¹v uvedených nevlastných integráloch je dolná hranica 0 vybraná len pre určitost', nemusí to tak byť; navyše môže byť rôzna v prípadoch (a) a (b) , podstatné je len že horná hranica je ∞



Obrázok 2.1: Závislosť $x \mapsto x^3/(2+x^4)$ (plná čiara) a závislosť $x \mapsto 1/x$ (prerušovaná čiara). Vidíme, že pre $x \gg 1$ sú prakticky zhodné.

2.8 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(1+e^x)} dx.$$

Riešenie: Singulárnym bodom uvedeného integrálu je $+\infty$. Pre veľké hodnoty x (teda pre $x \gg 1$) máme: $1+e^x \approx e^x$, a teda aj:

$$\ln(1+e^x) \approx \ln(e^x) = x,$$

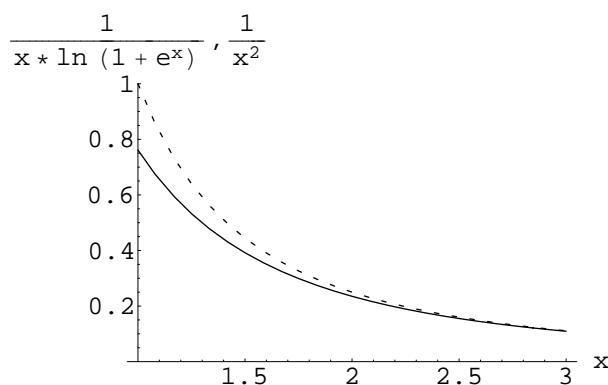
čo presne znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln(1+e^x)}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

To znamená, že

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(1+e^x)} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx,$$

kde druhý integrál konverguje a preto konverguje aj zadaný integrál. Spoločný graf zadanej funkcie a porovnávacej funkcie $1/x^2$ je na obrázku 2.2.



Obrázok 2.2: Závislosť $x \mapsto \frac{1}{x \ln(1+e^x)}$ (plná čiara) a závislosť $x \mapsto 1/x^2$ (prerušovaná čiara). Vidíme, že pre $x \gg 1$ sú prakticky zhodné.

2.9 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} dx.$$

Riešenie: Singulárnym bodom uvedeného integrálu je 0. Pre $x \rightarrow 0^+$ máme: $\sin(x) \approx x$, presnejšie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

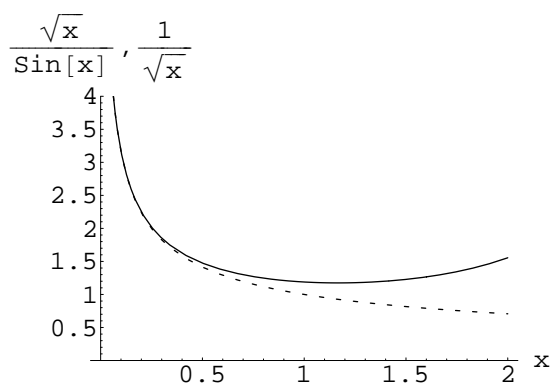
To ale znamená, že:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

A teda aj:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} dx \sim \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

kde druhý integrál konverguje a preto konverguje aj zadaný integrál. Spoločný graf zadanej funkcie a porovnávacej funkcie $1/\sqrt{x}$ je na obrázku 2.3.



Obrázok 2.3: Závislosť $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$ (plná čiara) a závislosť $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ (prerušovaná čiara). Vidíme, že pre $x \rightarrow 0^+$ sú prakticky zhodné.

2.10 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál

$$\int_0^1 \frac{x}{\arctan(x^2)} dx.$$

Riešenie: Singulárnym bodom uvedeného integrálu je 0. Pre $x \rightarrow 0^+$ máme: $\arctan(x) \approx x$, presnejšie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1.$$

To ale znamená, že:

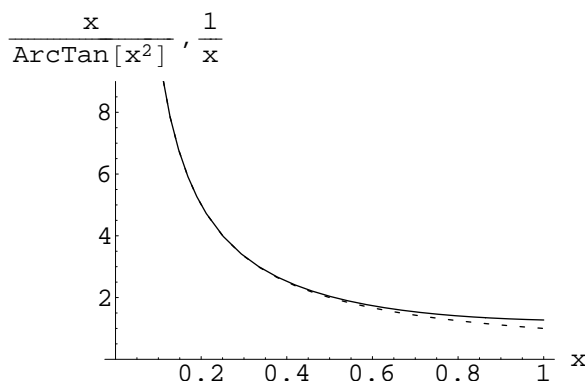
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x^2)}{x^2} = 1.$$

A teda aj:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\arctan(x^2)}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\arctan(x^2)} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x} dx,$$

kde druhý integrál diverguje a preto diverguje aj zadaný integrál. Spoločný graf zadanej funkcie a porovnávacej funkcie $1/x$ je na obrázku 2.4.



Obrázok 2.4: Závislosť $x \mapsto \frac{x}{\arctan(x^2)}$ (plná čiara) a závislosť $x \mapsto 1/x$ (prerušovaná čiara). Vidíme, že pre $x \rightarrow 0^+$ sú prakticky zhodné.

2.11 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx.$$

Riešenie: využijeme porovnávacie kritérium. Vyjdeme z toho, že nevlastný integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

konverguje (viď príklad 2.2). Porovnáme, v limitnom tvare, funkcie $\ln(1+x^2)/x^3$ a $1/x^2$ v okolí bodu ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Takže podľa porovnávacieho kritéria zadaný integrál konverguje.

2.12 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Riešenie: singulárnym bodom uvedeného integrálu je bod 1. Prepíšeme podintegrálnu funkciu do tvaru:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Odtiaľ teda vidíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}.$$

Takže podľa limitnej formy porovnávacieho kritéria:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

pričom druhý integrál konverguje, čo overíme priamym výpočtom:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = [-\sqrt{1-x}]_0^1 = 1.$$

Takže konverguje aj zadaný integrál.

2.13 Rozhodnite, či konverguje nevlastný integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx.$$

Riešenie: Použijeme vetu o absolútnej konvergencii a porovnávacie kritérium. Pozrieme sa teda na integrál

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| dx.$$

Tento ale konverguje ako je to zrejmé z nerovnosti:

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1,$$

a zo skutočnosti, že integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

konverguje - viď 2.2. Takže aj zadaný integrál konverguje.

2.14 Pokúste sa zopakovať postup z príkladu 2.13 na vyšetrenie konvergencie nevlastného integrálu

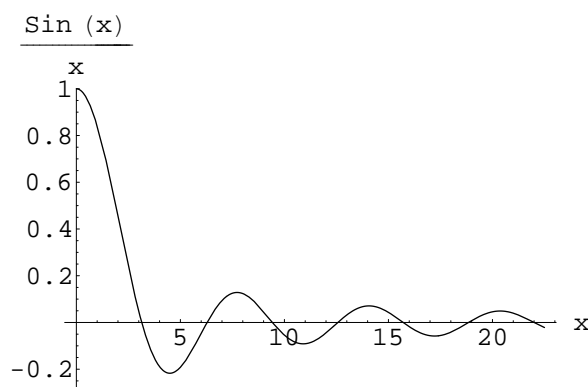
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Riešenie: v prvom rade si treba uvedomiť, že sa jedná o nevlastný integrál prvého druhu a nie druhého, hoci v $x = 0$ sa vynuluje menovateľ v podintegrálnej funkcii, ale ako dobre vieme, platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

takže podintegrálna funkcia je ohraničená v okolí bodu $x = 0$. Graf funkcie $\sin(x)/x$ je na obrázku 2.5. Urobme teraz teda rovnaký odhad na podintegrálnu funkciu ako ten z príkladu 2.13 (teda len odhad využívajúci, že funkcia sínus má hodnoty medzi -1 a 1):

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$



Obrázok 2.5:

Podľa výsledku príkladu 2.2 vieme, že nevlastný integál

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

diverguje. To znamená, že NEVIEME takto rozhodnúť o konvergencii integrálu

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx.$$

V skutočnosti je situácia takáto (toto sa musí ale ukázať zložitejšími prostriedkami!!!):

- integrál

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx.$$

diverguje

- integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

konverguje - dokonca je známa aj jeho hodnota:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

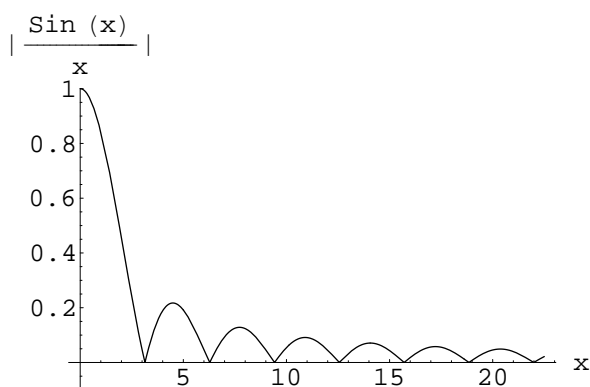
My si tu ukážeme ako možno nahliadnuť, že integrál

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx.$$

naozaj diverguje. Budeme sa pri tom opierať o poznatok, že tzv. *harmonický rad* diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Integrál ktorý skúmame si môžeme predstaviť ako súčet plôšok ohraničených jednotlivými "kopčekmi" funkcie $|\sin(x)/x|$ - viď obrázok 2.6. Nulové body funkcie $|\sin(x)/x|$ sú v $x = n\pi$, $n \in$



Obrázok 2.6:

$\{1, 2, 3, \dots\}$. Plôška kopčeka, ktorý sa začína v $n\pi$ a končí v $(n+1)\pi$ je

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx.$$

Toto číslo odhadneme z dola tak, že do integrálu vezmeme najmenšiu hodnotu funkcie $1/x$ v intervale $[n\pi, (n+1)\pi]$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{(n+1)\pi} \right| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

No ale takto máme neovnosť:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

čo ukazuje, že náš integrál diverguje.

Pozn.: v predchádzajúcom sme sa opreli o fakt, že harmonický rad diverguje. Túto skutočnosť si tu teraz aj ukážeme. Zapišeme harmonický rad nasledovným spôsobom:

$$\underbrace{(1)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

Takto priamo vidíme, že harmonický rad je rad so súčtom nie menším ako súčet nekonečne veľa polovic, čo je $+\infty$.

2.15 Zistite využitím porovnávacieho kritéria, prípadne aj vety o absolútnej konvergencii, či

konvergujú nevlastné integrály:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$

e) $\int_0^{\infty} \sin(x)e^{-x} dx$

f) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2+x^3} dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{x \ln(x)} dx$

h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx$

i) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$

j) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^3} dx$

k) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2+\sin(x)} dx$

l) $\int_0^{\infty} \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} dx$

m) $\int_1^{\infty} \frac{x^x}{e^{x^2}} dx$

n) $\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

o) $\int_0^{\infty} \frac{x}{\ln(1+e^{2x})} dx$

p) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$

q) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$

r) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$

Kapitola 3

Elementy teórie pravdepodobnosti

3.1 Náhodná premenná, rozdelenie pravdepodobnosti, stredné hodnoty, disperzia

Základné pojmy:

- diskrétna náhodná premenná

– nech náhodná premenná X nadobúda len diskkrétne hodnoty $\{X_1, X_2, X_3 \dots\}$. Nech hodnotu X_i nadobúda s pravdepodobnosťou $p_i = p(X_i)$. V prvom rade musíme mať *normovanie pravdepodobnosti*:

$$\sum_i p_i = 1.$$

Stredná hodnota náhodnej premennej X je číslo

$$\langle X \rangle = \sum_i X_i p_i.$$

Ak $f : \{X_1, X_2, X_3 \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia náhodnej premennej X , tak jej strednou hodnotou sa nazýva číslo

$$\langle f \rangle = \sum_i f(X_i) p_i.$$

Stredná kvadratická odchýlka náhodnej premennej X je číslo:

$$\sigma(X) = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}.$$

Zavedieme ešte jeden pojem pre náhodnú premennú X nadobúdajúcu hodnoty z diskkrétnej množiny $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, ktorá je charakterizovaná pravdepodobnosťami $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$: *najpravdepodobnejšia hodnota* náhodnej premennej X je číslo $X_{np} \in \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, také že

$$p(X_{np}) = \max\{p_1, p_2, p_3, \dots\}.$$

Hodnota X_{np} nemusí byť určená jednoznačne. Napríklad pre (poctivý) hod kockou je pravdepodobnosť hodiť ktorékoľvek číslo od 1 do 6 rovná $1/6$, preto každý hod je aj najpravdepodobnejší v zmysle uvedenej definície.

- spojitá náhodná premenná

- nech I je interval (alebo zjednotenie disjunktných intervalov), potom funkciu $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ voláme hustota pravdepodobnosti (spojitej) náhodnej premennej x nadobúdajúcej hodnoty z intervalu I ak spĺňa nasledovné podmienky:

i)

$$\rho(x) \geq 0$$

ii)

$$\int_I \rho(x) dx = 1$$

- nech $x \in I$ je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti ρ , potom strednou hodnotou náhodnej premennej x : $\langle x \rangle$ (alebo aj \bar{x}) voláme číslo

$$\langle x \rangle = \int_I x \rho(x) dx.$$

- nech $x \in I$ je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti ρ a nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia náhodnej premennej x , potom strednou hodnotou funkcie f voláme číslo

$$\langle f \rangle = \int_I f(x) \rho(x) dx.$$

- nech $x \in I$ je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti ρ , strednou kvadratickou odchýlkou náhodnej premennej x voláme číslo

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

- najpravdepodobnejšou hodnotou náhodnej premennej $x \in I$ s hustotou pravdepodobnosti ρ voláme číslo $x_{np} \in I$, také že

$$\rho(x_{np}) = \max_{x \in I} \rho(x).$$

Treba zase poznamenať, že najpravdepodobnejších hodnôt (tak ako aj v diskretnom prípade) môže byť aj viac.

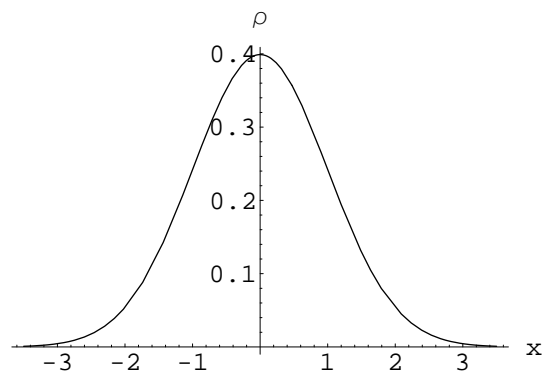
- **špeciálne prípady**: ak $x \in [a, b]$, tak o náhodnej premennej x hovoríme, že má rovnomerné rozdelenie ak

$$\rho(x) = \frac{1}{b-a}.$$

O náhodnej premennej $x \in \mathbb{R}$ hovoríme, že má normálne (Gaussovo) rozdelenie, ak

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

kde $\sigma > 0$, pre toto rozdelenie platí $\langle x \rangle = 0$ a $\sigma(x) = \sigma$. Graf normálneho rozdelenia s $\sigma = 1$ je na obrázku 3.1.



Obrázok 3.1:

- pre spojitú náhodnú premennú x s hustotou pravdepodobnosti $\rho(x)$ zavádzame pojem distribučnej funkcie $F(x)$: hodnota $F(x)$ je pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobú da hodnotu z intervalu $(-\infty, X]$. To znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Z definície hustoty pravdepodobnosti zase máme vyjadrenie pre $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx',$$

prípadne aj

$$\rho(x) = F'(x).$$

3.1 Náhodnou premennou X je súčet hodnôt dvoch hodov hracej kocky. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej X , jej strednú hodnotu a najpravdepodobnejšiu hodnotu.

Riešenie: jednotlivý hod hracej kocky dá jeden z výsledkov $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a to každý s rovnakou pravdepodobnosťou $1/6$. Súčet z dvoch hodou kocky môže nadobúdať hodnoty $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Zistíme s akými pravdepodobnosťami. Rozpíšeme si koľkými spôsobmi sa jednotlivé hodnoty môžu

dosiahnuť:

$2 = 1 + 1$...	1 spôsob
$3 = 1 + 2 = 2 + 1$...	2 spôsoby
$4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$...	3 spôsoby
$5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$...	4 spôsoby
$6 = 1 + 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3$...	5 spôsobov
$7 = 1 + 6 = 6 + 1 = 2 + 5 = 5 + 2 = 3 + 4 = 4 + 3$...	6 spôsoby
$8 = 2 + 6 = 6 + 2 = 3 + 5 = 5 + 3 = 4 + 4$...	5 spôsobov
$9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4$...	4 spôsoby
$10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$...	3 spôsoby
$11 = 5 + 6 = 6 + 5$...	2 spôsoby
$12 = 6 + 6$...	1 spôsob

aká je pravdepodobnosť realizácie každého spôsobu t.j. konkrétnej dvojice (aj s poradím) hodnôt? - je zrejme $1/(6 \cdot 6) = 1/36$. Takže máme:

$$p(2) = \frac{1}{36}, p(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, p(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, p(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, p(6) = \frac{5}{36}$$

$$p(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, p(8) = \frac{5}{36}, p(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, p(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, p(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, p(12) = \frac{1}{36}.$$

Takže stredná hodnota tejto náhodnej premennej je:

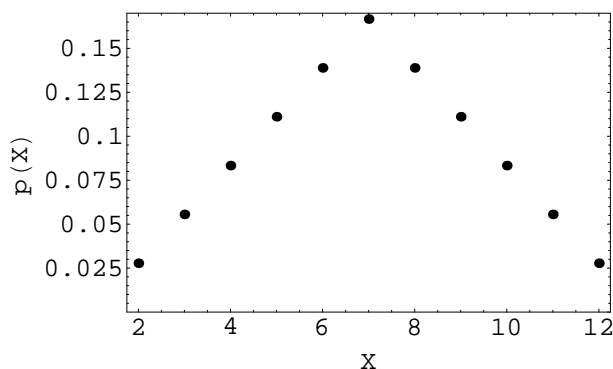
$$\langle X \rangle = 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{1}{18} + 4 \frac{1}{12} + 5 \frac{1}{9} + 6 \frac{5}{36} + 7 \frac{1}{6} + 8 \frac{5}{36} + 9 \frac{1}{9} + 10 \frac{1}{12} + 11 \frac{1}{18} + 12 \frac{1}{36} = 7.$$

Tento výsledok možno inak odpozorovať z toho, že čísla $p(X_i)$ súrozložené symmetricky okolo hodnoty 7. Najpravdepodobnejšia hodnota premennej X je zrejme tiež 7 lebo $p(7) = 1/6$ je maximálna pravdepodobnosť. Rozdelenie tejto náhodnej premennej je znázornené aj na obrázku 3.2.

3.2 Nájdite disperziu náhodnej premennej X z príkladu 3.1.

3.3 Uvažujme hru, v ktorej sa hádže kockou (bodové hodnoty hodov 1 – 6 rovnomerne rozdelené) a pravidelným štvorstenom (pyramídou), kde sú bodové hodnoty 1 – 4 znovu rovnomerne rozdelené. Zostavíme náhodnú premennú X takto: raz hodíme kockou a raz štvorstenom a bodové hodnoty sčítame. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti pre veličinu X , ďalej nájdite $\langle X \rangle$, $\sigma(X)$ a najpravdepodobnejšiu hodnotu veličiny X .

3.4 Urobte to isté, čo v príklade 3.3, len som zámenou *súčet* \rightarrow *súčin*.



Obrázok 3.2:

3.5 Nech diskrétna náhodná premenná nadobúda všetky nezáporné celé hodnoty $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Pravdepodobnosť, že nadobudne hodnotu n nech je daná vzťahom (**Poissonovo rozdelenie**):

$$p_n = K \frac{\mu^n}{n!},$$

kde μ je kladný parameter. Nájdite hodnotu normovacej končtanty K .

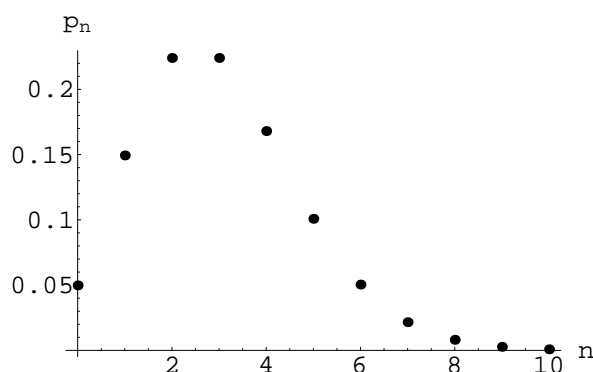
Riešenie: zapíšeme si podmienku normovania pravdepodobnosti:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = K e^{\mu} \Rightarrow K = e^{-\mu}.$$

Takže Poissonovo rozdelenie aj s normovaním má tvar:

$$p_n = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}.$$

Graf Poissonovho rozdelenia je na obrázku 3.3.

Obrázok 3.3: Graf Poissonovho rozdelenia s parametrom $\mu = 3$.

3.6 Nájdite strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýlku pre doskrétnu náhodnú premennú x , ktorá má Poissonovo rozdelenie.

Riešenie: priamim výpočtom získame obe požadované veličiny:

$$\langle x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} e^{-\mu} n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{n!} e^{-\mu} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \mu,$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} e^{-\mu} n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{n!} e^{-\mu} (n+1) = \mu [\langle x \rangle + 1] = \mu^2 + \mu.$$

Takže disperzia veličiny x je daná vzťahom:

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\mu}.$$

3.7 Diskrétna náhodná premenná $x \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ je charakterizovaná rozdelením pravdepodobnosti:

$$p_n = K \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Nájdite normovaciu konštantu K a vypočítajte $\langle x^l \rangle$ a to pre každé $l = 1, 2, 3, \dots$

Riešenie: nájdeme najskôr normovaciu konštantu:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Potrebujeme teda spočítať uvedený nekonečný rad. Sú dve možnosti: spočítať takýto rad presne alebo nájsť približnú hodnotu jeho súčtu. V tomto prípade možno použiť prvý spôsob (ale je to výnimka!):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = \\ &\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 1. \end{aligned}$$

Takže normovacia podmienka znamená:

$$K \cdot 1 = 1 \Rightarrow K = 1 \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Teraz sa pozrieme na požadované stredné hodnoty. Vezmeme najprv prípad $l = 2$; vtedy máme:

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n(n+1)}.$$

Tento rad je ale DIVERGENTNÝ (t.j. $\langle x^2 \rangle = +\infty$), lebo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1,$$

takže sa jedná prakticky o sumu samých jedničiek. Tým skôr pre $l \geq 3$ dostaneme $\langle x^l \rangle = +\infty$. Ostáva preveriť prípad $l = 1$, vtedy máme:

$$\langle x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

V tomto prípade je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

čo ale automaticky neznamená, že uvedený rad je konvergentný - viď príklad harmonického radu 2.14, kde tiež

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ale ako sme v príklade 2.14 ukázali, harmonický rad je divergentný. V skutočnosti aj náš rad pre $\langle x \rangle$ je divergentný, lebo je to NEKONEČNÁ časť radu harmonického! Takže aj stredná hodnota $\langle x \rangle = +\infty!$

3.8 Nech x je diskretná náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty $\{1, 2, 3, \dots\}$ s pravdepodobnosťami p_n . Nájdite (presným alebo približným výpočtom!) veličiny: normovacia konštantu K a $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ a $\sigma(x)$ a to pre nasledovné prípady pravdepodobností p_n :

$$\begin{array}{llll} a) p_n = K \frac{1}{n^4} & b) p_n = K \frac{1}{n^2(n^2+1)} & c) p_n = K \frac{1}{n^3} & d) p_n = K \frac{1}{n^5} \\ e) p_n = K e^{-n^2} & f) p_n = K \frac{n}{e^n+1} & g) p_n = K \frac{n}{n^4+1} & h) p_n = K \frac{1}{n^8} \end{array}$$

3.9 Nech $x \in [a, b]$ je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením. Vypočítajte $\langle x \rangle$ a $\sigma(x)$.
Riešenie: podľa zadania je hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej x daná vzťahom

$$\rho(x) = \frac{1}{b-a},$$

preto:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}, \\ \sigma(x) &= \sqrt{\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(b-a)^2}{4}} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{3} - \frac{(b-a)^2}{4}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$

3.10 Nech $x \in [0, 3]$ je náhodná premenná rovnomerne rozdelená. Nájdime pre ňu distribučnú funkciu $F(x)$.

Riešenie: v prvom rade si uvedomíme, že hustotu pravdepodobnosti pre náhodnú premennú x možno zapísať takto:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3} & , x \in [0, 3] \\ 0 & , x \in (3, \infty). \end{cases}$$

Preto pre distribučnú funkciu dostávame:

- $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx' = 0$$

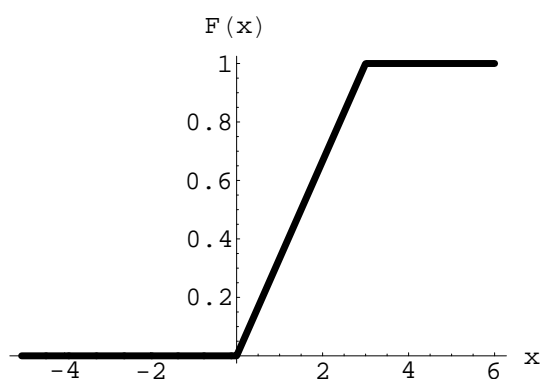
- $x \in [0, 3]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx' = \frac{x}{3}$$

- $x > 3$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx' = 1.$$

Distribučná funkcia F je znázornená na obrázku 3.4.



Obrázok 3.4:

3.11 Distribučná funkcia náhodnej premennej $x \in [0, \infty)$ je daná vzťahom:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Nájdite $\langle x \rangle$.

Riešenie: nech ρ je hustota pravdepodobnosti pre náhodnú premennú x :

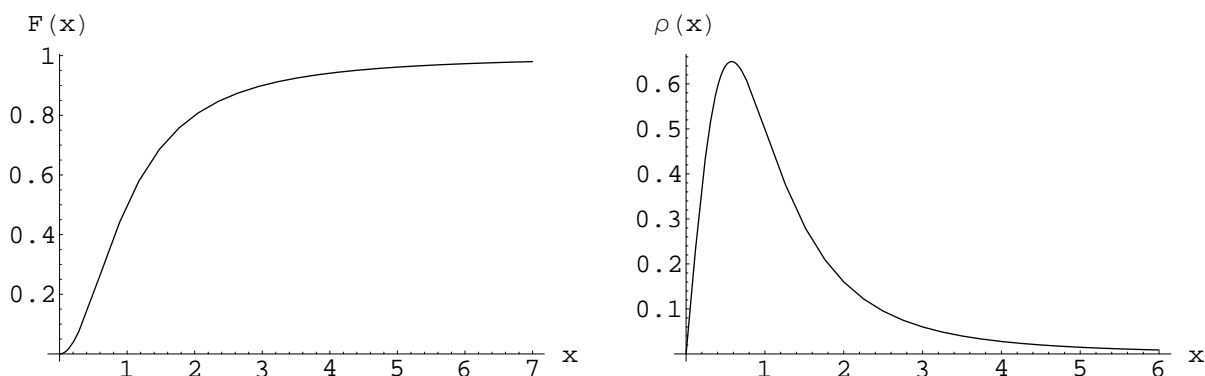
$$\rho(x) = F'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Požadovaná stredná hodnota je teda:

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x \rho(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Grafy funkcií $F(x)$ a $\rho(x)$ sú na obrázku 3.5.

3.12 Nájdite najpravdepodobnejšiu hodnotu a disperziu náhodnej premennej x z príkladu 3.11.



Obrázok 3.5:

3.13 Nájdite konštantu K tak aby funkcia

$$\rho(x) = Kx(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

bola hutotou pravdepodobnosti. Vypočítajte $\langle x \rangle$ a $\sigma(x)$ a najpravdepodobnejšiu hodnotu x_{np} .
Riešenie: konštantu K určíme z normovacej podmienky

$$1 = \int_0^1 Kx(1 - x)dx = K \int_0^1 (x - x^2)dx = K \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = K \frac{1}{6} \Rightarrow K = 6.$$

Takže máme

$$\rho(x) = 6x(1 - x).$$

Ďalej počítame podľa vyššie uvedených vzťahov:

$$\langle x \rangle = \int_0^1 x6x(1 - x)dx = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = 6 \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$\sigma^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2,$$

preto zrátame:

$$\langle x^2 \rangle = 6 \int_0^1 x^26x(1 - x)dx = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4)dx = 6 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} = 6 \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

A teda máme pre disperziu

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{10} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{20}}.$$

Ešte určíme najpravdepodobnejšiu hodnotu x_{np} . Treba nájsť globálne maximum(á) funkcie $\rho(x)$. Zderivujeme a položíme rovné nule:

$$\rho'(x) = 6 - 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Lahko sa overí, že v tomto bode je ozaž maximum (a nie minimum, a hodnota na krajoch intervalu je menšia). Preto

$$x_{np} = \frac{1}{2}.$$

Zase vyšlo, že $x_{np} = \langle x \rangle$. Toto ale nie je všeobecný prípad ako je ukázané v ďalšom príklade.

3.14 Nájdite konštantu K tak aby funkcia

$$\rho(x) = Kx^4 e^{-x}, \quad x \in [0, \infty).$$

bola hutotou pravdepodobnosti. Vypočítajte $\langle x \rangle$ a $\sigma(x)$ a najpravdepodobnejšiu hodnotu x_{np} .

Riešenie: postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade, akurát interval definície x je nekonečný, čo znamená, že treba vypočítať nevlastné integrály. Z príkladu 2.6 vieme, že

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \equiv n!,$$

preto v našom prípade $n = 4$ máme:

$$1 = \int_0^{\infty} Kx^4 e^{-x} dx = 24K \Rightarrow K = \frac{1}{24}.$$

Teda naše rozdelenie je

$$\rho(x) = \frac{1}{24} x^4 e^{-x}.$$

Graf tohoto rozdelenia je na obrázku 3.6. Stredná hodnota x je

$$\langle x \rangle = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx = \frac{5!}{24} = 5.$$

Na to aby sme dostali disperziu $\sigma(x)$ nám treba

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx = \frac{6!}{24} = 30$$

a teda disperzia (= stredná kvadratická odchýlka) je

$$\sigma(x) = \sqrt{30 - 5^2} = \sqrt{5}.$$

No a ostáva určiť najpravdepodobnejšiu hodnotu x_{np} . Nájdeme maximum funkcie $\rho(x)$:

$$\rho'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 e^{-x} (4 - x) = 0 \Rightarrow x_{np} = 4.$$

Teda naozaj je v tomto prípade $x_{np} \neq \langle x \rangle$.

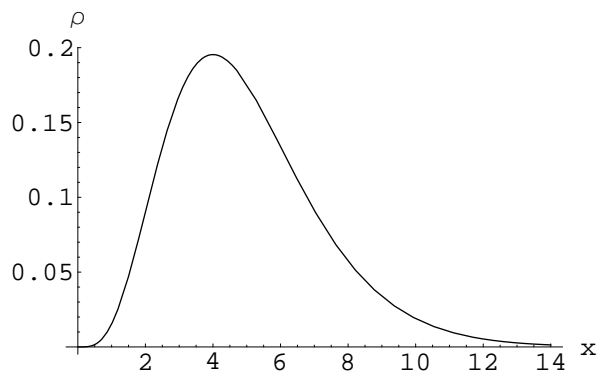
3.15 Nájdite normováciu konštantu K tak, aby zadaná funkcia ρ mohla byť hustotou pravdepodobnosti pre náhodnú premennú x zo zadaného intervalu.

a) $\rho(x) = K(x^2 - x^4), \quad x \in [-1, 1]$

b) $\rho(x) = Kxe^{-x^2}, \quad x \in [0, \infty)$

c) $\rho(x) = K \cos(x), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$

d) $\rho(x) = \frac{K}{\sqrt{x}}, \quad x \in [0, 1]$



Obrázok 3.6:

3.16 Nájdite strednú hodnotu náhodnej premennej x ak je daná jej hustota pravdepodobnosti

a) $\rho(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi/2]$

b) $\rho(x) = 2x$, $x \in [0, 1]$

c) $\rho(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$

d) $\rho(x) = -\ln(x)$, $x \in [0, 1]$

3.17 Nájdite strednú kvadratickú odchýlku náhodnej premennej x , ktorej hustota pravdepodobnosti je daná vzťahom

a) $\rho(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$

b) $\rho(x) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$

c) $\rho(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in [0, 1]$

d) $\rho(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$

3.2 Transformácia náhodnej premennej

- zadaná je náhodná premenná x a jej hustota pravdepodobnosti $\rho(x)$. Nech náhodná premenná x súvisí s náhodnou premennou y vzťahom

$$y = y(x),$$

kde funkcia $y(x)$ je prostá a má spojitú prvú deriváciu. Potom náhodná premenná y má rozdelenie dané hustotou pravdepodobnosti χ

$$\chi(y) = \rho(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|.$$

3.18 Nech náhodná premenná $x \in [0, \infty)$ má hustotu pravdepodobnosti

$$\rho(x) = e^{-x}.$$

Nájdite hustotu pravdepodobnosti χ náhodnej premennej

$$y = \arctan(x).$$

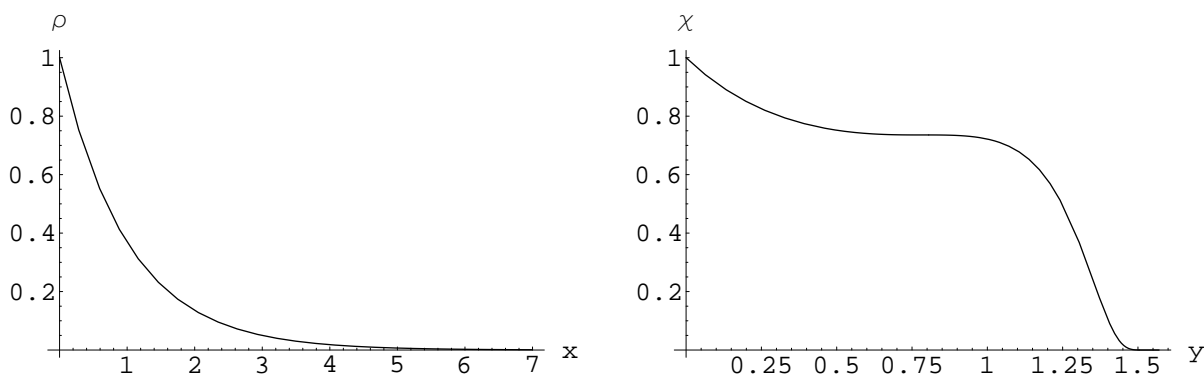
Riešenie: v prvom rade určíme, z akej množiny je y : no ak $x \in [0, \infty) \Rightarrow y \in [0, \pi/2)$. Vyjadríme si x ako funkciu y , teda:

$$x = \tan(y) \Rightarrow \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\cos^2(y)}$$

a finálne

$$\chi(y) = \frac{e^{-\tan(x)}}{\cos^2(y)}.$$

Pre porovnanie grafy funkcií ρ a χ sú na obrázku 3.7.



Obrázok 3.7:

3.19 Nech náhodná premenná $x \in [0, \infty)$ má hustotu pravdepodobnosti

$$\rho(x) = e^{-x}.$$

Nájdite hustotu pravdepodobnosti χ náhodnej premennej

$$y = e^{-x}.$$

Riešenie: postupujeme presne rovnako ako v príklade 3.18. $x \in [0, \infty)$ to znamená, že $y \in [0, 1]$. Vyjadríme x ako funkciu y a zrátame potrebnú deriváciu:

$$x = -\ln(y) \Rightarrow \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{y}.$$

Tým prichádzame k hustote pravdepodobnosti náhodnej premennej y :

$$\chi(y) = y \frac{1}{y} = 1,$$

čo znamená, že náhodná premenná $y \in [0, 1]$ má rovnomerné rozdelenie!

3.20 Rýchlosť (veľkosť rýchlosti) molekuly plynu je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti

$$\rho(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-v^2}, \quad v \in [0, \infty).$$

Nájdite strednú hodnotu veľkosti rýchlosti, najpravdepodobnejšiu hodnotu veľkosti rýchlosti a vypočítajte rozdelenie novej premennej ϵ - energie molekuly:

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2.$$

Riešenie: stredná hodnota veľkosti rýchlosti je

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-v^2} dv = |v^2 = u, 2v dv = du| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u e^{-u} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Najpravdepodobnejšia rýchlosť sa dostane ako bod v ktorom má funkcia $\rho(v)$ maximum:

$$\rho'(v) = (2v - 2v^3) e^{-v^2} = 2v(1 - v^2)e^{-v^2} = 0 \Rightarrow v_1 = 0, v_2 = 1.$$

Keďže $\rho(0) = 0$, tak vo v_1 maximum nie je, ale vo v_2 je a preto

$$v_{np} = 1.$$

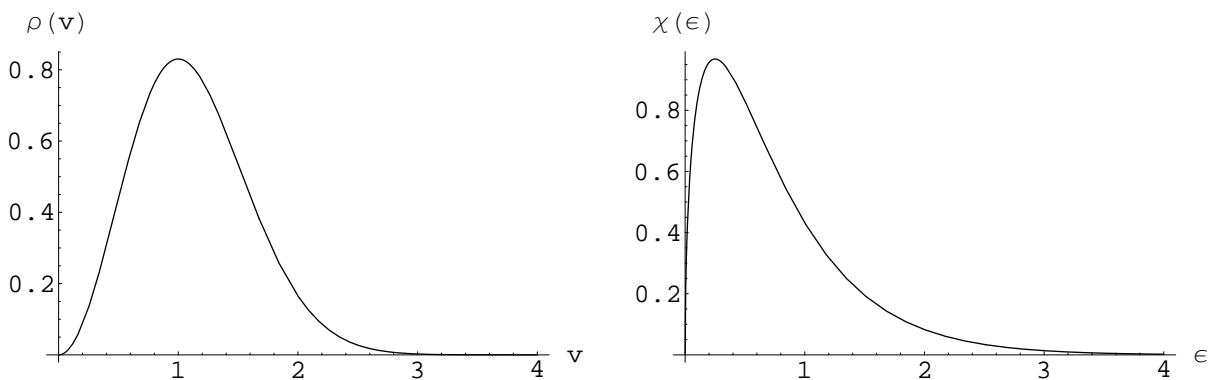
No a ešte nájdeme rozdelenie pravdepodobnosti pre energiu: vyjadríme v ako funkciu ϵ :

$$v = \sqrt{2\epsilon} \Rightarrow \frac{dv}{d\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

A teda rozdelenie pre energiu je

$$\chi(\epsilon) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} 2\epsilon e^{-2\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\epsilon} e^{-2\epsilon}, \quad \epsilon \in [0, \infty).$$

Rozdelenia $\rho(v)$ a $\chi(\epsilon)$ sú na grafoch 3.8.



Obrázok 3.8:

3.21 Nájdite hustotu pravdepodobnosti pre náhodnú premennú y ak $y = y(x)$ a náhodná premenná x má známe rozdelenie pravdepodobnosti:

- a) $\rho(x) = \frac{1}{4}, x \in [0, 4], y = \sqrt{x}$ b) $\rho(x) = 6x(1-x), x \in [0, 1], y = x^2$
 c) $\rho(x) = \sin(x), x \in [0, \pi/2], y = \sin(x)$ d) $\rho(x) = xe^{-x}, x \in [0, \infty), y = \sqrt{x}$

3.3 Funkcie viacerých náhodných premenných

- **nezávislosť:** nech náhodná premenná $x \in I_1$ je popísaná hustotou pravdepodobnosti $\rho(x)$ a nech náhodná premenná $y \in I_2$ je popísaná hustotou pravdepodobnosti $\xi(y)$. Potom ak tieto veličiny sú nezávislé, tak usporiadaná dvojica (x, y) je (dvojrozmerná) náhodná premenná, $(x, y) \in I_1 \times I_2$, a je popísaná hustotou pravdepodobnosti

$$\chi(x, y) = \rho(x)\xi(y).$$

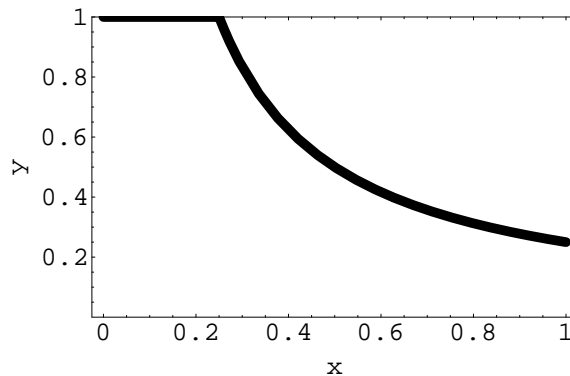
- predchádzajúce sa rovnako rozšíri na ľubovoľný počet premenných (rozmerov) .

3.22 Nájdite hustotu pravdepodobnosti pre náhodnú veličinu z , ktorá vzniká ako súčin náhodných veličín x a y ($z = xy$), ktoré sú nezávislé a každá je rovnomerne rozdelená v intervale $[0, 1]$. Riešenie: v prvom rade si uvedomíme, že veličina z nadobúda tiež hodnoty z intervalu $[0, 1]$. Nech teda Z je niektoré z čísel z tohoto intervalu. Vypočítame pravdepodobnosť, že z bude z intervalu $[0, Z]$ - teda vlastne nájdeme distribučnú funkciu F . Máme:

$$z \leq Z \Rightarrow xy \leq Z \Rightarrow y < \frac{Z}{x},$$

samozrejme spolu s tým, že $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1$. $F(Z)$ je dané, vid' obrázok 3.9 nasledovne:

$$F(Z) = Z + \int_Z^1 \frac{Z}{x} dx = Z - Z \ln(Z).$$



Obrázok 3.9: Znázornenie oblasti prípustných dvojíc (x, y) pre $Z = 1/3$. $F(Z)$ je plocha ležiaca v uvedenom štvorci pod zvýraznenou čiarou.

Takže pre každé $z \in [0, 1]$ je

$$F(z) = z - z \ln(z).$$

A teda pre hustotu pravdepodobnosti máme:

$$\rho(z) = F'(z) = 1 - \ln(z) - z \frac{1}{z} = -\ln(z).$$

Grafy funkcií F a ρ sú na obrázku 3.10. Vidíme, že najpravdepodobnejšou hodnotou premennej z je 0. Vypočítame ešte strednú hodnotu veličiny z :

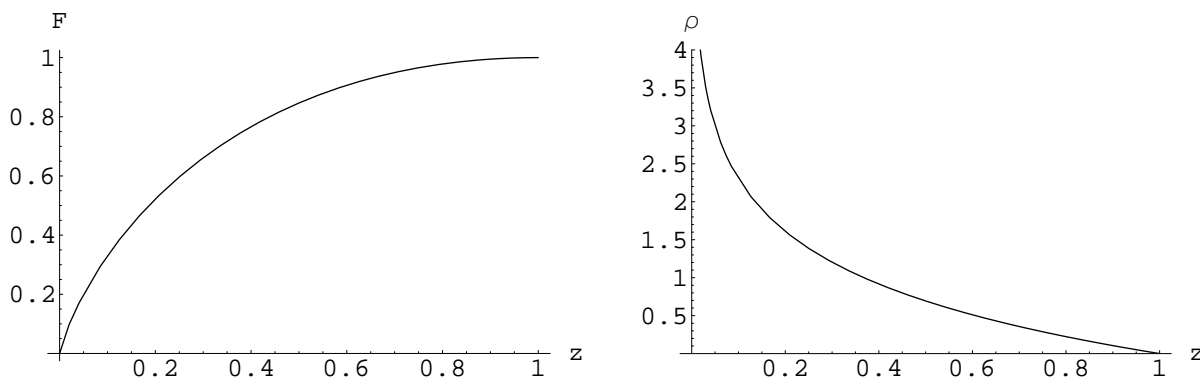
$$\langle z \rangle = \int_0^1 z \rho(z) dz = \int_0^1 -z \ln(z) dz = - \left[\frac{1}{2} z^2 \ln(z) - \frac{1}{2} \int z^2 \frac{1}{z} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 z dz = \frac{1}{4}.$$

No a ešte dopočítame strednú kvadratickú odchýlku pre z :

$$\langle z^2 \rangle = \int_0^1 -z^2 \ln(z) dz = \frac{1}{9}$$

a teda

$$\sigma(z) = \sqrt{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{12} \approx 0.2205.$$



Obrázok 3.10: Funkcie F a ρ z úlohy 3.22.

3.23 Nájdite hustotu pravdepodobnosti pre náhodnú veličinu z , ktorá vzniká ako podiel náhodných veličín x a y

$$z = \frac{x}{y},$$

ktoré sú nezávislé a každá je rovnomerne rozdelená v intervale $[0, 1]$.

Riešenie: v prvom rade si uvedomíme, že veličina z nadobúda tiež hodnoty z intervalu $[0, \infty)$.

Nech teda Z je niektoré z čísel z tohoto intervalu. Vyjadríme pravdepodobnosť $F(Z)$, že

$$z \leq Z \Rightarrow y \geq \frac{x}{Z}$$

spolu s obmedzeniami $x, y \in [0, 1]$, viď obrázok 3.11 - pre $Z \in [0, 1]$ je

$$F(Z) = \frac{1}{2} Z$$

a pre $Z > 1$ je

$$F(Z) = 1 - \frac{1}{2Z},$$

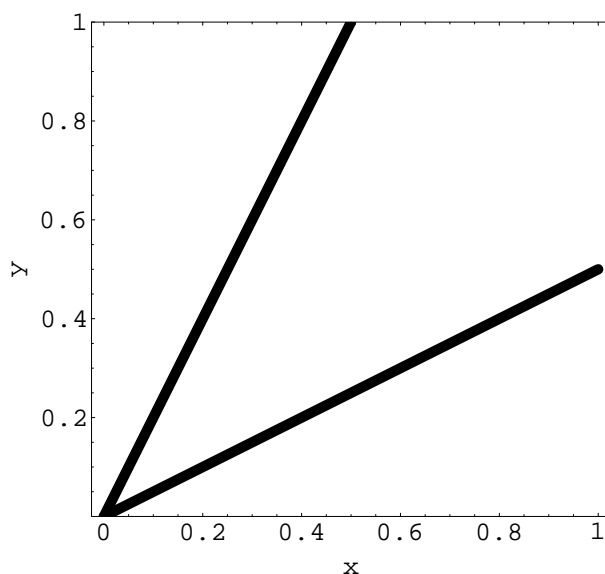
takže pre každé $z \in [0, \infty)$ je

$$F(z) = \begin{cases} z/2 & , 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - 1/(2z) & , z > 1. \end{cases}$$

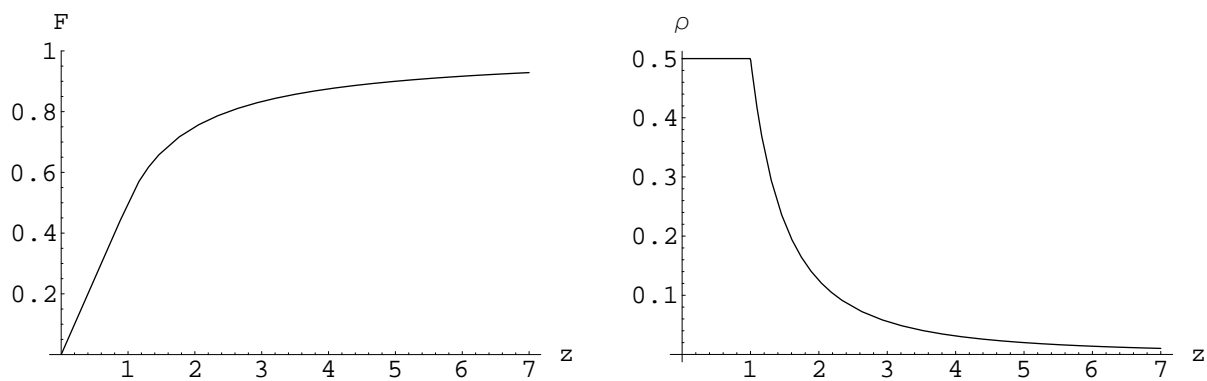
A hustota pravdepodobnosti pre premennú z je teda ($\rho(z) = F'(z)$)

$$\rho(z) = \begin{cases} 1/2 & , 0 \leq z \leq 1 \\ 1/(2z^2) & , z > 1. \end{cases}$$

Funkcie F a ρ sú pre tento prípad znázornené na obrázku 3.12.



Obrázok 3.11: K určeniu funkcie $F(Z)$: dolná čiara zodpovedá $Z = 2$ a horná $Z = 1/2$. $F(Z)$ je plocha ležiaca v uvedenom štvorci nad príslušnou čiarou.



Obrázok 3.12: Funkcie F a ρ z úlohy 3.23.

3.24 Vypočítajte strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýlku pre náhodnú premennú z z úlohy 3.23.

3.25 Náhodné premenné x, y sú nezávislé a obe rovnomerne rozdelené v intervale $[0, 1]$. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej z :

$$a) z = x + y$$

$$b) z = x - y.$$

Nájdite pre oba prípady aj veličiny $\langle z \rangle$, $\sigma(z)$ a najpravdepodobnejšiu hodnotu z .

3.26 Strely padajú do kruhového terča s polomerom R rovnomerne (t.j. pravdepodobnosť, že strela zasiahne vybraný kusok plochy terča je priamo úmerná ploche tohoto kúska). Nájdite rozdelenie náhodnej premennej - vzdialenosti r miesta zásahu od stredu terča. Ďalej nájdite aj veličiny $\langle r \rangle$ a $\sigma(r)$ a najpravdepodobnejšiu hodnotu veličiny r .

Riešenie: nech $0 \leq r \leq R$, nájdeme pravdepodobnosť $F(r)$, že strela padne do kruhu so stredom v strede terča a polomerom r ; keďže strely padajú na terč rovnomerne, je táto pravdepodobnosť rovná:

$$F(r) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Takže hustota pravdepodobnosti pre náhodnú veličinu r je:

$$\rho(r) = F'(r) = \frac{2r}{R^2}, \quad r \in [0, R].$$

Hneď vidíme, že najpravdepodobnejšou hodnotou je $r = R$ (t.j. kraj terča). Vypočítame požadované veličiny:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^R r \rho(r) dr = \left[\frac{2}{3} \frac{r^3}{R^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{2}{3} R, \\ \langle r^2 \rangle &= \int_0^R r^2 \rho(r) dr = \left[\frac{2}{4} \frac{r^3}{R^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{1}{2} R^2, \\ \sigma(r) &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \frac{R}{\sqrt{18}}. \end{aligned}$$

Veličina $\sigma(r)$ sama o sebe nie je názorná. Informáciu nám ale dá podiel $\sigma(r)/R$, ktorá určuje v akom je vzťahu typický rozptyl v streľbe k polomeru celého kruhu. V našom prípade:

$$\frac{\sigma(r)}{R} = \frac{1}{\sqrt{18}} \approx 0.2357 (\approx 23.6\%).$$

Kapitola 4

Obyčajné diferenciálne rovnice

4.1 Úvod

Obyčajná diferenciálna rovnica je vo všeobecnosti rovnica typu:

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

kde f je funkcia $n + 1$ premenných. V ďalšom texte slovo *obyčajná* budeme vypúšťať. Objasníme len, že znamená rozlíšenie od tzv. *parciálnych* diferenciálnych rovníc, ktorými sa teraz zaoberať nebudeme.

Diferenciálnu rovnicu nazývame *diferenciálnou rovnicou n -tého rádu* ak funkcia f závisí netriviálne od n -tej derivácie neznámej funkcie y a nezávisí už od žiadnej vyššej derivácie neznámej funkcie. Existuje mnoho klasifikácií diferenciálnych rovníc, tu uvedieme len tú základnú:

- **lineárne diferenciálne rovnice** - tie zodpovedajú situácii, keď funkcia f je lineárnou funkciou svojich argumentov $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ (teda nemusí to byť lineárna funkcia argumentu (nezávisle premennej) x). Uvedieme príklady lineárnych diferenciálnych rovníc:

$$a) y'(x) + y(x) + 2 = 0 \quad b) y'''(x) - x^3 y'(x) - 2y(x) + \sin(x) - x^3 = 0$$

Diferenciálna rovnica $a)$ je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu. Rovnica $b)$ je lineárna diferenciálna rovnica tretieho rádu. Lineárne diferenciálne rovnice ešte delíme na:

- ✓ homogénne
- ✓ nehomogénne

Všeobecný tvar homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu je

$$p_n(x)y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0,$$

kde funkcie (koeficienty) p_j , $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ sú zadané a $p_n(x)$ nie je identicky nula. Hlavnou charakteristikou homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc je, že ak $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú dve riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak aj funkcia

4.1.1 Pôvod diferenciálnych rovníc

Zrejme hlavným zdrojom diferenciálnych rovníc je **fyzika** a všetky jej bohaté aplikácie. Ale diferenciálne rovnice vystupujú aj v najrôznejších ekonomických, sociologických, biologických a chemických modeloch, slúžiacich na popis reálnych situácií.

Uvedieme príklady:

- druhý newtonov pohybový zákon pre pohyb hmotného bodu hmotnosti m v smere x je diferenciálnou rovnicou druhého rádu:

$$mx''(t) = F,$$

kde x je poloha v čase t , t.j. $x''(t)$ je zrýchlenie v čase t , a F je pôsobiaca sila. Tá môže závisieť od času, polohy prípadne aj rýchlosti, takže v obecnosti je: $F = F(t, x(t), x'(t))$. Napríklad pre voľný pád (x je zvislá súradnica) je

$$mx''(t) = mg,$$

kde $g \approx 10m/s^2$ je konštanta - tiažové zrýchlenie.

- biologický model *predátor - korisť*: ak uvažujeme súžitie predátora y ($y(t)$ je počet kusov predátora v čase t) a jeho koristi (napr. nejakého bylinožravca) z ($z(t)$ je počet kusov koristi v čase t), tak časový vývoj populácií oboch druhov možno úspešne modelovať systémom diferenciálnych rovníc

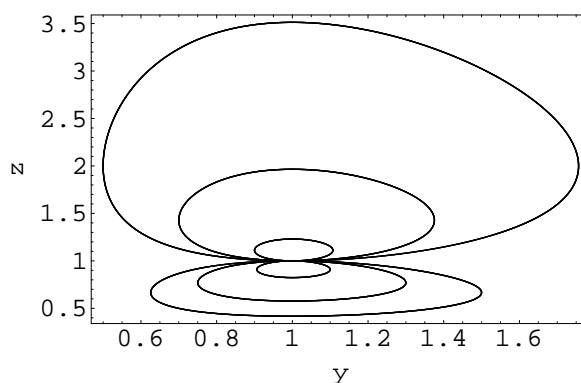
$$y'(t) = -y(t)(\alpha - \beta z(t)),$$

$$z'(t) = z(t)(\gamma - \delta y(t)),$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sú (pozitívne) konštanty - parametre interakcie medzi druhmi. Tomuto modelu sa v literatúre hovorí bežne **Lotka - Volterra model**. Popíšeme si význam jednotlivých členov systému:

- ✓ $y'(t)$ ($z'(t)$) je rýchlosť rastu populácie predátora (koristi)
- ✓ člen $-\alpha y(t)$ hovorí o tom, že ak žije priveľa predátorov v danej oblasti strácajú podiel na koristi - a brzdí sa ich množenie (zabraňuje teda premnoženiu predátora)
- ✓ člen $+\beta y(t)z(t)$ opisuje nárast rastu populácie predátora v dôsledku veľkého počtu kusov (veľká pôrodnosť) - ale prežitie jedincov je naviazané na dostatok potravy - preto súčin so $z(t)$ - ak klesá populácia koristi, klesá aj tento člen zvyšujúci rast populácie predátora
- ✓ člen $+\gamma z(t)$ opisuje zvýšený rast populácie koristi v dôsledku jej dostatočného počtu
- ✓ člen $-\delta z(t)y(t)$ zase opisuje bránenie premnoženia populácii koristi pri dostatočnom počte kusov predátora ($y(t)$), ktorý má dobrý výber v love (veľké $z(t)$)

Vplyv parametrov na dynamiku populácií predátora a koristi v modele Lotka - Volterra je zobrazený na obrázku 4.1.



Obrázok 4.1: Cykly v modele Lotka - Volterra. Zaujíname sa o stav populácie predátora y a koristi z , ktoré sú v istom okamihu rovnaké (rovné 1) a ďalej sa vyvíjajú podľa Lotka - Volterra rovníc. Použili sme fixné parametre: $\alpha = \gamma = \delta = 1$ a menili sme parameter β . Hodnoty parametra β boli postupne 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, a to prvá hodnota prislúcha najširšiemu cyklu a postupne sa zmenšujúcim cyklom až opačne deformovaným. Konkrétny časový vývoj populácií y a z prislúchajúci každému z cyklov je na obrázku 4.2.

4.2 Elementárny prípad

- rovnica typu:

$$y'(x) = f(x),$$

kde $f(x)$ je známa funkcia. Takto postavená úloha znie slovne: nájsť všetky funkcie $y(x)$, ktorých derivácia je zadaná funkcia $f(x)$; táto úloha sa preto rieši priamočiarou integráciou:

$$y(x) = \int f(x)dx$$

- predchádzajúci prípad možno zovšeobecniť na rovnicu ľubovoľného rádu: ak

$$y^{(n)}(x) = f(x),$$

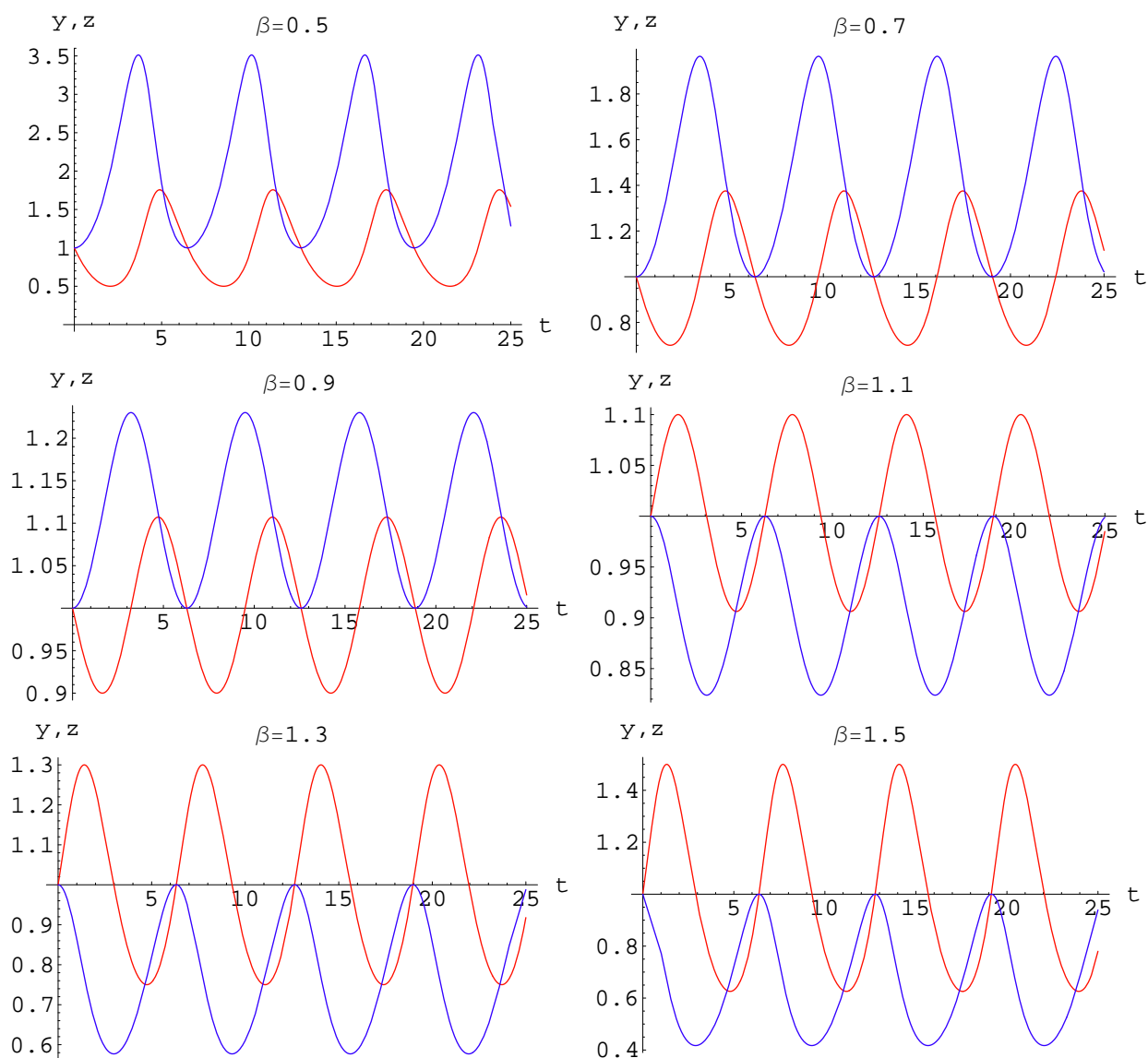
tak

$$y(x) = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n\text{-times}} f(x) dx dx \dots dx.$$

- pozorovanie: riešenie prvej rovnice - ktorá je prvého rádu - obsahuje JEDNU konštantu, lebo sme RAZ integrovali; podobne riešenie druhej rovnice, ktorá je n -tého rádu obsahuje n konštant, lebo sme n -krát integrovali. Prítomnosť týchto konštant umožňuje predpísať na riešenie rovnice n -tého rádu n ďalších podmienok. Bežná je formulácia tzv. **počiatočnej (alebo Cauchyho) úlohy** : od riešenia rovnice n -tého rádu, ktoré hľadáme v intervale $[a, b]$ požadujeme splnenie podmienok (tzv. počiatočné podmienky):

$$y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, y''(a) = \alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1},$$

kde α_i sú ľubovoľné čísla.



Obrázok 4.2: Časový vývoj populácie predátora y (červená krivka) a koristi z (modrá krivka) v modeli Lotka - Volterra štartujúcim z počiatočného stavu $y = z = 1$, pri hodnotách $\alpha = \gamma = \delta = 1$ a pri rôznych hodnotách β , tak ako je vyznačené na grafoch.

4.1 Nájdite všetky riešenia diferenciálnej rovnice

$$y'(x) = x - \sin(x)$$

ktoré spĺňa počiatočnú podmienku:

$$y(0) = -1.$$

Riešenie: všeobecné riešenie rovnice získame integráciou

$$y(x) = \int (x - \sin(x)) dx = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + C.$$

Počiatočná podmienka určí konštantu C :

$$-1 = \frac{0^2}{2} + \cos(0) + C = 1 + C \Rightarrow C = -2.$$

Takže riešenie našej počiatkovej úlohy je

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) - 2.$$

4.2 Nájdite všetky riešenia diferenciálnej rovnice

$$y'''(x) = 1 - x^2.$$

Riešenie: tak ako sme uviedli vyššie, k nájdeniu všetkých riešení treba vykonať po sebe tri integrácie:

$$y(x) = \int \left(\int \left(\int (1 - x^2) dx \right) dx \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

Poznamenajme, že aj c_1 je konštanta (o ktorej nič iné nevieme), tak aj $c_1/2$ je tak isto konštanta a to isté riešenie môžeme zapísať aj takto:

$$y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} + \tilde{c}_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

4.3 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$y''(x) = x^2.$$

ktoré spĺňa počiatkové podmienky:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Riešenie: všeobecné riešenie rovnice získame integráciou

$$y(x) = \int \left(\int x^2 dx \right) dx = \int \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2.$$

Konštanty C_1, C_2 určíme z počiatkových podmienok:

$$0 = C_2, \quad 1 = C_1,$$

takže

$$y(x) = \frac{x^4}{12} + x.$$

4.4 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy:

$$y'(x) = \frac{1}{x} - x, \quad y(2) = 5.$$

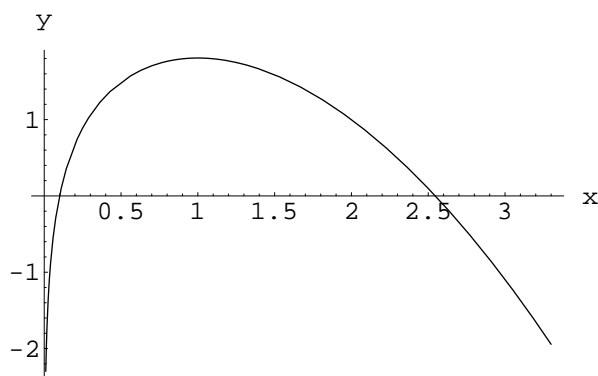
Riešenie: nájdeme najprv všeobecné riešenie uvedenej diferenciálnej rovnice

$$y(x) = \int \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c.$$

Integračnú konštantu c špecifikujeme pomocou počiatkovej podmienky:

$$5 = \ln(2) - \frac{4}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = 3 - \ln(2) \quad (\approx 2.307).$$

Graf riešenia je znázornený na obrázku 4.3.



Obrázok 4.3: Graf riešenie počiatkovej (Cauchyho) úlohy z príkladu 4.4. Vidíme, že riešenie sa nedá "potiahnuť" dozadu za bod $x = 0$, kde má singularitu. Pre všetky $x > 0$ je ale riešenie dobre definované.

4.5 Zvislý pohyb telesa v homogénnom gravitačnom poli Zeme popísanom tiažovým zrýchlením g ($g \approx 10\text{m/s}^2$)² sa riadi diferenciálnou rovnicou druhého rádu (pohybová rovnica, Newtonov zákon sily):

$$z''(t) = -g,$$

kde z je zvislá súradnica (orientová tak, že rastie smerom hore, t.j. z je výška odpočítaná od istej úrovne). Nech bol nejaký kameň vyhodенý z výšky $z = 0$ v čase $t = 0$ rýchlosťou v_0 . Nájdite výšku kameňa v ľubovoľnom čase $t > 0$. Riešte pre všeobecné v_0 a potom pre $v_0 = 30\text{m/s}$. Rozdiskutujte riešenie.

Riešenie: v prvom rade treba vyriešiť pohybovú rovnicu:

$$z''(t) = -g \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int \left(\int (-g) dt \right) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$$

Integračné konštanty c_1 a c_2 určíme z počiatkových podmienok ($z'(t)$ je rýchlosť v čase t):

$$\begin{array}{l|l} z(0) = 0 & \Rightarrow \\ z'(0) = v_0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} c_1 = v_0 \\ c_2 = 0 \end{array}.$$

Takže závislosť výšky na čase je daná vzorcom

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$$

V špeciálnom prípade $v_0 = 30\text{m/s}$ je to

$$z(t) = -5t^2 + 30t.$$

Funkcia $z(t)$ dosahuje svoje maximum v čase

$$t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

²teda špeciálne spomeňme, že bez odporu vzduchu

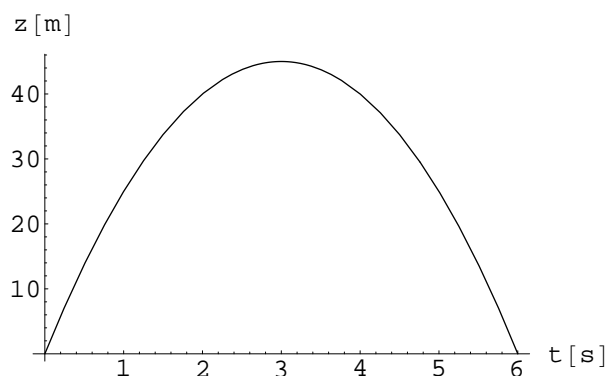
a toto maximum má hodnotu (maximálna dosiahnutá výška):

$$z_{max} = z(t_{max}) = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Pre $v_0 = 30\text{m/s}$ je maximálna dosiahnutá výška rovná 45m . Teleso sa ďalej vráti späť do výšky $z = 0$ (spadne späť na zem) v čase

$$t_f = 2t_{max} = \frac{2v_0}{g}.$$

V prípade $v_0 = 30\text{m/s}$ to je $t_f = 6\text{s}$. Graf závislosti $z(t)$ pre $v_0 = 30\text{m/s}$ je na obrázku 4.4.



Obrázok 4.4: Závislosť výšky telesa vrhnutého smerom nahor počiatočnou rýchlosťou 30m/s od času (v zanedbaní odporu vzduchu).

4.6 Na elektrón s hmotnosťou m_e a elektrickým nábojom e pôsobí sila od časovo premenného elektrického poľa opísaného intenzitou elektrického poľa (vektor v smere kartézskej osi x):

$$E = E_0 \sin(\omega t),$$

kde E_0 je amplitúda intenzity elektrického poľa a ω je uhlová frekvencia. V čase $t = 0$ je elektrón v pokoji (má nulovú rýchlosť) a je v polohe $x = 0$. Nájdite polohu elektrónu ako funkciu času.

Riešenie: zapíšeme si silu, ktorá pôsobí na elektrón v čase t :

$$F(t) = eE = eE_0 \sin(\omega t),$$

takže pohybová rovnica pre elektrón je diferenciálna rovnica druhého rádu:

$$m_e x''(t) = eE_0 \sin(\omega t),$$

alebo teda, po predelení hmotnosťou m_e , spolu s počiatočnými podmienkami,:

$$x''(t) = \frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Diferenciálnu rovnicu vyriešime dvojnásobnou integráciou:

$$x(t) = \int \left(\int \left(\frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega t) \right) dt \right) dt = -\frac{eE_0}{m_e \omega^2} \sin(\omega t) + c_1 t + c_2.$$

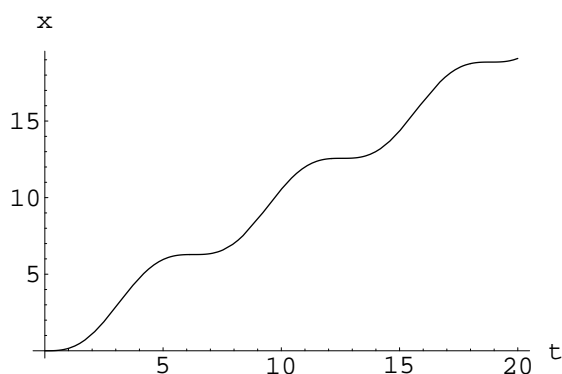
Integračné konštanty určíme z počiatočných podmienok:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{eE_0}{m_e\omega},$$

takže poloha elektónu v čase t je zadaná formulou:

$$x(t) = -\frac{eE_0}{m_e\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{eE_0}{m_e\omega} t = \frac{eE_0}{m_e\omega} \left(-\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + t \right).$$

Tvar tohoto riešenia je zobrazený na obrázku 4.5.



Obrázok 4.5: Riešenie príkladu 4.6 s výberom konštánt $e = 1$, $m_e = 1$, $E_0 = 1$, $\omega = 1$. Vidíme, že riešenie znamená, že elektón sa pohybuje stále smerom rastu súradnice x len s premenlivou rýchlosťou.

4.7 Na urýchlenie rakety/vesmírnej sondy sa používajú zvyčajne tzv. triskové motory - t.j. z tela sondy cez trysky sa vypustia splodiny nejakého horenia (paliva), a to v smere opačnom ako je žiadúce, aby sa zariadenie urýchlilo. Proces je tým efektívnejší, čím väčšou rýchlosťou sú splodiny horenia vypúšťané. Konkrétne, rýchlosť sondy v voči vonkajšej inerciálnej sústave sa mení s hmotnosťou sondy M (tá sa mení, lebo spálené palivo sa vypúšťa von!) podľa diferenciálnej rovnice (tzv. *Meščerského rovnica*):

$$\frac{dv}{dM} = -\frac{u}{M},$$

kde u je rýchlosť, akou sú voči telu sondy vypúšťané splodiny horenia paliva. Nájdite, akou rýchlosťou sa bude pohybovať sonda, ak na začiatku mala hmotnosť M_i a na konci horenia mala hmotnosť M_f a na začiatku horenia paliva sonda stála.

Riešenie: priamou integráciou dostávame závislosť rýchlosti sondy od jej hmotnosti:

$$v(M) = \int \frac{-u}{M} dM = -u \ln(M) + c.$$

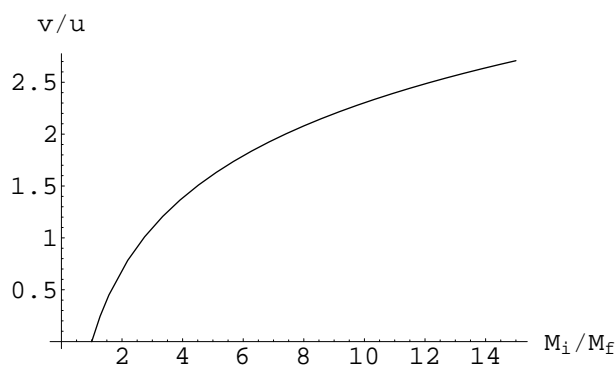
Integračnú konštantu c určíme z počiatočnej podmienky, ktorá hovorí, že pri počiatočnej hmotnosti sondy M_i bola jej rýchlosť nulová:

$$0 = -u \ln(M_i) + c \quad \Rightarrow \quad c = u \ln(M_i).$$

A teda pri finálnej hmotnosti M_f je rýchlosť sondy rovná

$$v(M_f) = -u \ln(M_f) + u \ln(M_i) = u \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right).$$

Závislosť $v(M_f)$ od podielu M_i/M_f je znázornená na grafe 4.6.



Obrázok 4.6: Výsledná rýchlosť v sondy v jednotkách u (rýchlosť unikajúcich splodín horenia paliva voči telu sondy) versus podiel začiatkovej a konečnej hmotnosti. Vidíme, že pre dosť veľký podiel M_i/M_f (menovite väčší ako $e \approx 2.718$) je $v > u$.

4.8 Riešte počiatočné úlohy pre diferenciálne rovnice:

a) $y'(x) = 4x$, $y(0) = 5$

b) $y'(x) = \sin(x)$, $y(0) = 1$

c) $y'(x) = 1 + x^2$, $y(0) = 0$

d) $y'(x) = e^x$, $y(0) = 0$

e) $y'(x) = \cos^2(x)$, $y(0) = 0$

f) $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 1$

g) $y''(x) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

h) $y''(x) = \sin(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

i) $y''(x) = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

j) $y''(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

k) $y'''(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

l) $y^{(4)}(x) = x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

4.3 Diferenciálna rovnica prvého rádu v separovanom tvare

Jedná sa o diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá zapísať takto:

$$y'(x) = f(x)g(y),$$

kde f a g sú známe funkcie (obecne spĺňajúce nejaké predpoklady, tie ale teraz rozoberať nebudeme). Rovnicu vyriešime nasledovne:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Treba si uvedomiť, že aj ak vieme uvedené integrály vypočítať, jedná sa o riešenie v implicitnom tvare. Previesť tento implicitný tvar na explicitný sa musíme ešte posnažiť, a treba povedať, že nie vždy to bude možné.

4.9 Vyriešte diferenciálnu rovnicu aj s počiatočnou podmienkou:

$$y'(x) = -y^4, \quad y(0) = 1.$$

Riešenie: podľa návodu vyššie máme:

$$\int \frac{dy}{y^4} = - \int 1 dx \Rightarrow -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y_0^3} \right) = -x \Rightarrow \frac{1}{y^3} = 3x + \frac{1}{y_0^3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + \frac{1}{y_0^3}}},$$

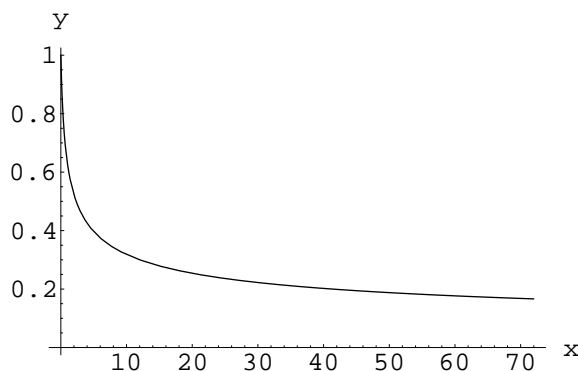
kde y_0 je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočnej podmienky:

$$y(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y_0^3}}} = y_0.$$

Takže celkové riešenie je

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + 1}}.$$

Graf riešenia je na obrázku 4.7.



Obrázok 4.7: Graf riešenie diferenciálnej rovnice z príkladu 4.9. Poznamenajme, že diferenciálna rovnica tohoto typu opisuje jednoduchý model chladnutia telesa žiarením, kde y je teplota a x je čas (v istých jednotkách).

4.10 Vyriešte diferenciálnu rovnicu

$$y'(x) = \frac{\sin(x)}{y}, \quad y(1) = 1.$$

Riešenie: postupne máme

$$\int y dy = \int \sin(x) dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\cos(x) + C \Rightarrow y(x) = \sqrt{2C - 2\cos(x)}.$$

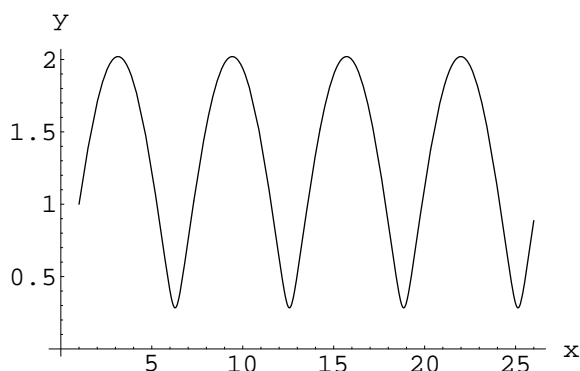
Splnenie počiatočnej podmienky vyžaduje aby:

$$1 = \sqrt{2C - 2\cos(1)} \Rightarrow 2C - 2\cos(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2} + \cos(1),$$

a teda

$$y(x) = \sqrt{1 + 2\cos(1) - 2\cos(x)}.$$

Graf riešenia je na obrázku 4.8.



Obrázok 4.8: Graf riešenia diferenciálnej rovnice z príkladu 4.10.

4.11 Vyriešte počiatočnú úlohu pre diferenciálnu rovnicu

$$y'(x) = \frac{y}{y-1}x, \quad y(2) = 2.$$

Riešenie: skúsime nájsť všeobecné riešenie uvedenej rovnice

$$\int \frac{y-1}{y} dy = \int x dx \quad \Rightarrow \quad y - \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c.$$

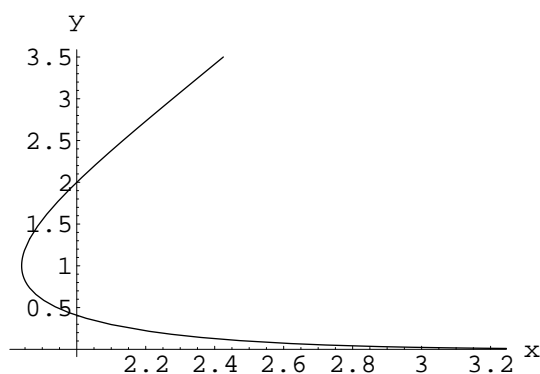
Vidíme, že máme síce známe vyjadrenie x ako funkcie y ale inverzný vzťah nezískame v elementárnych funkciách. To nám ale nebráni určiť integračnú konštantu c z počiatočnej podmienky:

$$2 - \ln(2) = 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -\ln(2),$$

a teda

$$\frac{x^2}{2} = y - \ln|y| + \ln(2).$$

Toto riešenie je zobrazené na grafe 4.9.



Obrázok 4.9: Závislosť určená implicitne v príklade 4.11. Vidíme, že závislosť $x = x(y)$ nie je prostá a preto inverzná závislosť $y = y(x)$ neexistuje v celom rozsahu oboru hodnôt (y). Menovite, deliacou (kritickou) hodnotou je $y = 1$. To je aj singulárny bod pravej strany diferenciálnej rovnice z ktorej sme vyšli.

4.12 Vyriešte počiatkové úlohy pre separovateľné diferenciálne rovnice prvého rádu:

$$a) y'(x) = \frac{1}{y}, y(1) = 1$$

$$b) y'(x) = \frac{\cos(x)}{y}, y(1) = 1$$

$$c) y'(x) = \frac{y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$$

$$d) y'(x) = (1+y^2)x^2, y(0) = 1$$

$$e) y'(x) = -\frac{x}{y}, y(1) = 4$$

$$f) y'(x) = xy, y(1) = -1$$

$$g) y'(x) = xy^2, y(1) = 1$$

$$h) y'(x) = \frac{y}{x^2}, y(1) = 1$$

4.4 Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

- **homogénna rovnica:** je rovnica typu

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0,$$

kde $p(x)$ je zadaná funkcia - jedná sa teda o špeciálny prípad z paragrafu 4.3. Možno ju vyriešiť (teda nájsť všeobecné riešenie) nasledovne:

$$y'(x) = -p(x)y(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{C} \right| = - \int p(x)dx \Rightarrow$$

$$y(x) = C \exp \left(- \int p(x)dx \right).$$

- **nehomogénna rovnica:** je zovšeobecnením predchádzajúceho v zmysle, že pravá strana rovnice sa zmení z nuly na ľubovoľnú známu funkciu nezávisle premennej:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ sú zadané funkcie. Postup pri jej riešení tejto rovnice - tzv. **metóda variácie konštanty** je nasledovný: najprv sa vezme homogénna úloha

$$z'(x) + p(x)z(x) = 0,$$

ktorej riešenie už poznáme:

$$z(x) = C \exp \left(- \int p(x)dx \right).$$

No a riešenie pôvodnej úlohy sa hľadá v tomto tvare so zámenou C na funkciu (preto variácia konštanty):

$$y(x) = \gamma(x) \exp \left(- \int p(x)dx \right).$$

Keď sa toto dosadí do zadanej rovnice dostáva sa rovnica pre $\gamma(x)$:

$$\gamma'(x) = q(x) \exp \left(\int p(x)dx \right),$$

ktorá je elementárneho typu a jej riešenie sa získa priamou integráciou:

$$\gamma(x) = \int \left[q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] dx.$$

Spätným dosadením dostaneme priamo vzorec pre riešenie³:

$$y(x) = \int \left[q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] dx \exp \left(- \int p(x) dx \right).$$

4.13 Vyriešte počiatočnú úlohu:

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$

Riešenie: jedná sa o homogénnu úlohu, preto:

$$\frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{y}{y_0} \right| = x \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0 e^x.$$

Integračnú konštantu y_0 určíme z počiatočnej podmienky:

$$1 = y_0 e^0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1.$$

Takže riešenie našej počiatočnej úlohy je

$$y(x) = e^x.$$

4.14 Vyriešte počiatočnú úlohu:

$$y'(x) = \cos(x)y(x), \quad y(0) = 1.$$

Riešenie: jedná sa o homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Ak si ju prepíšeme do tvaru:

$$y'(x) - \cos(x)y(x) = 0,$$

tak vidíme, že môžeme stotožniť $p(x) = -\cos(x)$ a jej obecné riešenie teda je

$$y(x) = C \exp \left(- \int (-1) \cos(x) dx \right) = C \exp(\sin(x)).$$

Splníme počiatočnú podmienku:

$$1 = C e^0 = C,$$

takže finálne riešenie počiatočnej úlohy je

$$y(x) = e^{\sin(x)}.$$

³poznamenajme, že by bolo náležité ovládať metódu variácie konštánt a nie len tento vzorec, napokon aj z praktického hľadiska, vzorec je už dosť komplikovaný

4.15 Elementárny model pre rádioaktivitu úložiska rádioaktívneho odpadu: pripomeňme si, že ak máme v čase t $N(t)$ jadier rádioaktívnej látky charakterizovanej rozpadovou konštantou λ (rozmer λ je s^{-1}), tak potom v čase t je rýchlosť rozpadu jadier (teda počet rozpadnutých jadier za 1 sekundu) daná vzťahom

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Predpokladajme, že v čase 0 je rádioaktívnych jadier N_0 . Predchádzajúcu rovnicu ľahko vyriešime aj s počiatočnou podmienkou $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ - to je bežný exponenciálny zákon pre počet rádioaktívnych jadier jedného typu, izolovaných od okolia. My teraz modifikujeme rovnicu pre počet rádioaktívnych jadier v závislosti na čase aby vyhovovala nasledovnému modelu: budeme predpokladať, že do úložiska privádzame stále nové rádioaktívne jadrá a ich množstvo je Q za sekundu. Takisto predpokladáme, že v čase 0 je v úložisku 0 (čisté úložisko) rádioaktívnych jadier. Zistíte závislosť $N(t)$.

Riešenie: najprv zostavíme diferenciálnu rovnicu. Zrejme je to modifikácia vyššie uvedenej rovnice pre izolovaný systém rádioaktívnych jadier. Musíme zaradiť, že rýchlosť počet rádioaktívnych jadier sa nemení len ich rozpadom ale aj sa zväčšuje aj ich "prítokom":

$$N'(t) + \lambda N(t) = Q.$$

Stotožníme $p(t) = \lambda$ a $q(t) = Q$ a máme riešenie:

$$N(t) = \int Q e^{\int \lambda dt} dt e^{-\int \lambda dt} = Q \left(\int e^{\lambda t} dt \right) e^{-\lambda t} = \frac{Q}{\lambda} (e^{\lambda t} + C) e^{-\lambda t} = \frac{Q}{\lambda} (1 + C e^{-\lambda t}),$$

kde C je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočnej podmienky:

$$0 = \frac{Q}{\lambda} (1 + C) \Rightarrow C = -1,$$

a teda závislosť počtu rádioaktívnych jadier na čase je:

$$N(t) = \frac{Q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}).$$

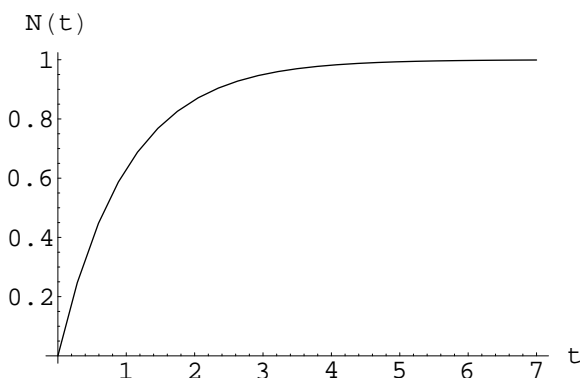
Poznamenajme, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{Q}{\lambda},$$

t.j. limitne pre veľké časy (väšie ako $1/\lambda$ - čo je charakteristický čas rozpadu jadra) sa celkový počet rádioaktívnych jadier približuje ku konštantnej hodnote Q/λ . Graf funkcie $N(t)$ pre $Q = 1$, $\lambda = 1$ je na obrázku 4.10.

Poznamenajme ešte, že dôležitou charakteristikou rádioaktívneho materiálu akéhokoľvek typu je jeho *aktivita* A - to je počet rádioaktívnych premien za jednotku času. Aktivita je úmerná počtu rádioaktívnych jadier, je daná vzťahom:

$$A(t) = \lambda N(t).$$



Obrázok 4.10: Závislosť počtu rádioaktívnych jadier v úložisku od času, vypočítaná pre nasledovné hodnoty parametrov: $Q = 1$, $\lambda = 1$.

V našom modeli úložiska s prísunom rádioaktívneho materiálu je teda aktivita v čase t daná vzťahom

$$A(t) = Q(1 - e^{-\lambda t}).$$

V limite veľkých časov je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = Q,$$

teda aktivita úložiska je rovná množstvu rádioaktívnych jadier pritekajúcich za jednotku času.

4.16 Riešte diferenciálne rovnice so zadanou počiatočnou podmienkou:

- | | |
|---|--|
| a) $y'(x) - xy(x) = 0$, $y(0) = 1$ | b) $y'(x) - xy(x) = 0$, $y(1) = 1$ |
| c) $y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$, $y(0) = 1$ | d) $y'(x) + y(x) = \sin(x)$, $y(0) = 0$ |
| e) $y'(x) - 4y(x) = x$, $y(0) = 0$ | f) $y'(x) + y(x) = e^x$, $y(0) = 2$ |

4.5 Elementárna numerická metóda riešenia diferenciálnej rovnice prvého rádu

Uvažujme diferenciálnu rovnicu prvého rádu spolu s počiatočnou podmienkou v tvare

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

O funkcii (pravej strane) predpokladajme, že je spojitá (minimálne v nejakom okolí počiatočného bodu (x_0, y_0)). Zapišme definíciu ľavej strany diferenciálnej rovnice:

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Z hľadiska praktického výpočtu derivácie sa pozrieme na vec tak, že reálne nerobíme uvedenú limitu ale sa uspokojíme s dostatočne malou hodnotou veličiny (kroku) h :

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}, \quad \text{pre dostatočne malé } h.$$

No a teraz tento približný prepis prenesieme do zadanej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y),$$

odkiaľ:

$$y(x+h) = hf(x, y) + y(x) \quad \& \quad y(x_0) = y_0.$$

Tento predpis sa volá Eulerova metóda.

4.17 Napíšme program, ktorý Eulerovou metódou vyrieši diferenciálnu rovnicu

$$y'(x) = -(1+y)\sqrt{x^2+y^2}, \quad y(0) = 0$$

a to na intervale $x \in [0, 5]$.

Riešenie: napíšme taký program v jazyku C, a výstup zariadime tak, že zapíšeme hodnoty funkcie (riešenia) $y(x)$ do súboru *euler.dat*:

```
# include<stdio.h>
# include<math.h>

float rhs(float a, float b)
{
return -(1.+b)*sqrt(a*a+b*b);
}

main()
{

float y,x,h,y0,x0;
FILE *fw;
int i;

x0=0.;
y0=0.;

h=0.001;
x=x0;
y=y0;

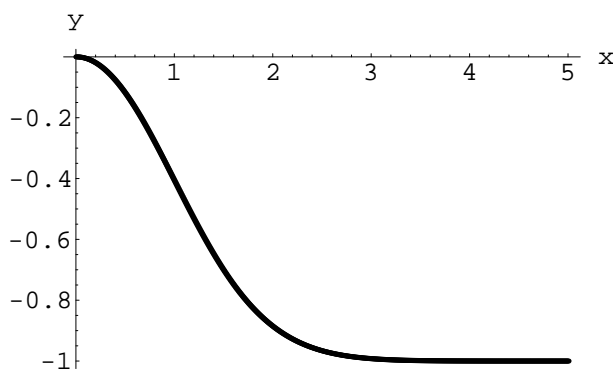
fw=fopen(" euler.dat","w");
i=0;
do
```

```

{
y=y+rhs(x,y)*h;
if (i%10==0) {
fprintf(fw,"% f",x);
fprintf(fw,);
fprintf(fw,"% f \ n",y); }
x=x+h;
i++;
}
while (x<=5.);
fclose(fw);
}

```

Výstup z programu je spracovaný na obrázku 4.11.



Obrázok 4.11:

4.18 Vyriešte numericky použitím Eulerovej metódy diferenciálne rovnice v zadaných intervaloch a výsledky spracujte graficky:

- | | |
|--|---|
| a) $y'(x) = -\cos(xy)$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 3]$ | b) $y'(x) = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 2]$ |
| c) $y'(x) = \sin(x) + ye^{-x}$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$ | d) $y'(x) = -ye^{-y}$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 5]$ |
| e) $y'(x) = \frac{1}{1+x^2y^2}$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 10]$ | f) $y'(x) = e^{-x} \sin(y)$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 10]$ |
| g) $y'(x) = (1+y) \sin(y)$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 10]$ | h) $y'(x) = -y(1-y)$, $y(0) = 1/2$, $x \in [0, 5]$ |
| i) $y'(x) = \cos(x+y)$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 20]$ | j) $y'(x) = e^{-y} \sin(y^2)$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 10]$ |
| k) $y'(x) = 1 + xy - x^2y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 4]$ | l) $y'(x) = 1 - x^2y^2 + x^3y^3$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 4]$ |

4.6 Riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc pomocou matematického software

V dnešnej dobe je takmer samozrejmosťou riešiť mnoho (praktických) úloh z (aplikovanej) matematiky pomocou rôzneho matematického software. Táto skutočnosť ale nepotláča potrebu mať prehľad v teoretických základoch matematiky, nakoľko už len formulácia otázky, nehovoriac o praktickej obsluhu software, vyžaduje netriviálne matematické vedomosti.

Cieľom tohoto paragrafu nie je naučiť sa v detailoch ovládať vybraný software. Zameriame sa len na jednu úlohu: naučiť sa vo vybranom software - menovite MATHEMATICA - pracovať s obyčajnými diferenciálnymi rovnicami. Toto urobíme na sérii príkladov, ktoré ozrejmi syntax používaných príkazov prostredia MATHEMATICA.

4.6.1 Príklady na nájdenie všeobecného riešenia obyčajnej diferenciálnej rovnice

4.19 Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu:

$$y''(x) = -y(x).$$

Riešenie:

```
In[4] := DSolve[{y''[x] == -y[x]}, y[x], x]
Out[4] = {{y[x] -> C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x]}}
```

Obrázok 4.12: Prvý riadok je príkaz na riešenie zvolenej diferenciálnej rovnice a druhý riadok je samotné riešenie, ktoré môžeme prepísať do formy: $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$.

4.20 Nájdime všeobecné riešenie (nelineárnej) diferenciálnej rovnice tretieho rádu:

$$y'''(x) - y'(x) = x^3.$$

Riešenie:

```
In[3] := DSolve[y'''[x] - y'[x] == x^3, y[x], x]
Out[3] = {{y[x] -> -3 x^2 - x^4/4 + e^x C[1] - e^-x C[2] + C[3]}}
```

Obrázok 4.13: Syntax je rovnaká ako v príklade 4.19, samotné riešenie, ktoré môžeme prepísať do formy: $y(x) = -3x^2 - x^2/4 + c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3$.

4.21 Nájdime všeobecné riešenie (nelineárnej) diferenciálnej rovnice prvého rádu:

$$y'(x) = -y(x) + x^2 y^2(x).$$

Riešenie:

```
In[5]:= DSolve[{y'[x] == -y[x] + x^2 * (y[x])^2}, y[x], x]
Out[5]= {{y[x] -> \frac{1}{2 + 2x + x^2 + e^x C[1]}}}
```

Obrázok 4.14: Syntax je rovnaká ako v príklade 4.19, samotné riešenie, ktoré môžeme prepísať do formy: $y(x) = \frac{1}{2+2x+x^2+ce^x}$.

Ako ukážu ďalšie príklady, použitie programu MATHEMATICA (rovnako ako aj každého iného prostredia) neznamena vyriešenie všetkého, ukážeme si 2 možné komplikácie, ktoré môžu nastať:

- ✓ nezrozumiteľnosť odpovede, resp. odpoveď vyžadujúca ďalšie štúdium
- ✓ neschopnosť software poskytnúť odpoveď

4.22 Nájdime všeobecné riešenie (nelineárnej) diferenciálnej rovnice prvého rádu:

$$y'(x) = -y^2(x) + x^2y(x).$$

Riešenie:

```
In[9]:= DSolve[{y'[x] == -(y[x])^2 + x^2 * (y[x])}, y[x], x]
Out[9]= {{y[x] -> \frac{3 e^{\frac{x^3}{3}} (-x^3)^{1/3}}{3 (-x^3)^{1/3} C[1] - 3^{1/3} x \text{Gamma}[\frac{1}{3}, -\frac{x^3}{3}]}}}
```

Obrázok 4.15: MATHEMATICA poskytuje riešenie, ktoré obsahuje tzv. *neúplnú Gamma-funkciu*. Poznamenajme, že informácie o tejto funkcii možno nájsť aj v help-e k programu MATHEMATICA.

Podobná situácia nastáva v nasledujúcom prípade:

4.23 Nájdime všeobecné riešenie (nelineárnej) diferenciálnej rovnice druhého rádu:

$$xy''(x) - y(x) = 0.$$

Riešenie:

```
In[9]:= DSolve[x * y''[x] - y[x] == 0, y[x], x]
Out[9]= {{y[x] -> -\sqrt{x} BesselI[1, 2\sqrt{x}] C[1] + 2\sqrt{x} BesselK[1, 2\sqrt{x}] C[2]}}
```

Obrázok 4.16: MATHEMATICA poskytuje riešenie, ktoré obsahuje tzv. *Besselove funkcie*.

4.24 Nájdime všeobecné riešenie (nelineárnej) diferenciálnej rovnice prvého rádu:

$$y'(x) = -\sin(y(x)) + x^2y(x).$$

Riešenie:

```
In[14]:=
DSolve[{y'[x] == -Sin[y[x]] + x^2 * (y[x])}, y[x], x]

Solve::tdep :
The equations appear to involve the variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. More...

Out[14]=
DSolve[{y'[x] == -Sin[y[x]] + x^2 y[x]}, y[x], x]
```

Obrázok 4.17: MATHEMATICA neposkytuje žiadne riešenie - to neznamená, že riešenie neexistuje, ba ani že je príliš komplikované - znamená to len, že program nemá algoritmus na to ako ho nájsť.

4.25 Nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc

- | | |
|--|--|
| a) $y''(x) - 4y'(x) = x$ | b) $y'''(x) + y'(x) = \cos(2x)$ |
| c) $x^2y''(x) - y(x) = 0$ | d) $x^2y''(x) - xy'(x) = 0$ |
| e) $x^2y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$ | f) $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$ |
| g) $y'(x) - y(x) + y^2(x) = 0$ | h) $y''(x) - y(x) = \sin(x)$ |
| i) $y''(x) + y(x) = \sin(x)$ | j) $y''''(x) + y(x) = 0$ |
| k) $y''(x) + y(x) = \tan(x)$ | l) $y''''(x) + y''(x) = 1$ |
| m) $y'''(x) - 4y(x) = x^2$ | n) $y'''' + 2y'(x) = x$ |
| o) $y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = x$ | p) $y'''(x) - y''(x) + y'(x) + y(x) = x$ |

4.6.2 Príklady na nájdanie riešenia počiatkovej úlohy (riešenia v tvare "vzorca")

Teraz si ukážeme, ako môžeme nájsť riešenie konkrétnej počiatkovej úlohy. Je to len malá modifikácia predchádzajúceho.

4.26 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy pre diferenciálnu rovnicu druhého rádu:

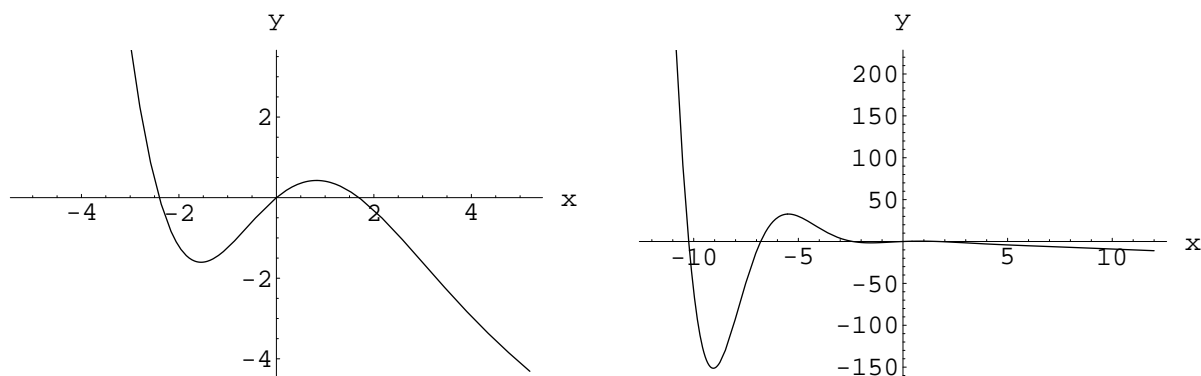
$$y''(x) + y'(x) + y(x) = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Riešenie:

```
In[7]:= DSolve[{y''[x] + y'[x] + y[x] == -x, y[0] == 0, y'[0] == 1}, y[x], x]

Out[7]= {{y[x] -> -e^{-x/2} \left( -e^{x/2} + e^{x/2} x + \text{Cos}\left[\frac{\sqrt{3} x}{2}\right] - \sqrt{3} \text{Sin}\left[\frac{\sqrt{3} x}{2}\right] \right)}}
```

Obrázok 4.18: Vidíme syntax príkazu na riešenie počiatkovej úlohy. Konkrétne toto riešenie môžeme zapísať aj v bežnom tvare: $1 - x - e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + e^{-x/2}\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x/2)$. Graf tohoto riešenia je na obrázku 4.19



Obrázok 4.19: Riešenie počiatkovej úlohy z príkladu 4.26.

4.27 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy pre diferenciálnu rovnicu prvého rádu:

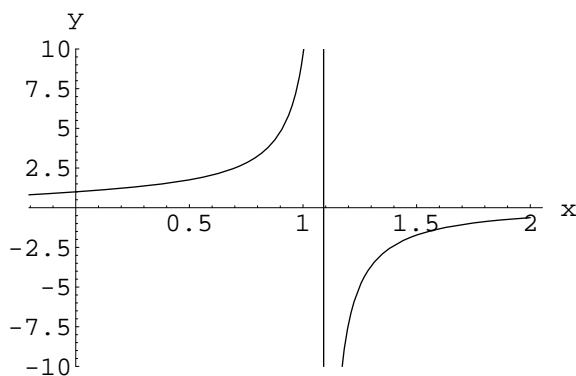
$$y'(x) = y(x) + x^2 y^2(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Riešenie:

```
In[29] :=
DSolve[{y'[x] == y[x] + x^2 * (y[x])^2, y[0] == 1}, y[x], x]

Out[29] =
{{y[x] -> -\frac{e^x}{-3 + 2 e^x - 2 e^x x + e^x x^2}}}
```

Obrázok 4.20: Riešenie môžeme zapísať aj v bežnom tvare: $-e^x / (-3 + 2e^x - 2xe^x + x^2e^x)$. Graf a ďalšia diskusia tohoto riešenia sú na obrázku 4.21



Obrázok 4.21: Riešenie počiatkovej úlohy z príkladu 4.27. Vidíme, že riešenie má singularitu, približne v bode $x \approx 1.1$.

4.28 Nájdite riešenia počiatkových úloh pre diferenciálne rovnice:

- a) $y''(x) = -y(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ b) $y''(x) = y(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$
 c) $y''(x) - 4y'(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ d) $y''(x) - 4y(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 e) $y''(x) + 4y'(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ f) $y''(x) + 4y(x) = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 g) $y'(x) = x(1 + y(x))$, $y(1) = 1$ h) $y'(x) = xe^{y(x)}$, $y(0) = 1$
 i) $y'(x) + y(x) = \sin(x)$, $y(0) = 1$ j) $y''''(x) = \cos(3x)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
 i) $y'(x) - 4y(x) = \cos(x)$, $y(0) = 0$

4.6.3 Príklady na vyriešenie počiatkovej úlohy - bez podmienky na riešenie v tvare vzorca

V bežnej aplikačnej praxi je požiadavka nájsť riešenie konkrétnej zaujímavej diferenciálnej rovnice (počiatkovej úlohy pre ňu) často nesplniteľná. Riešenie povedzme existuje (a práve jedno!) ale nedá sa napísať ako konečná kombinácia elementárnych funkcií. To ale neznamená, že sa s ním nedá pracovať. Základnou užitočnou informáciou o riešení je jeho graf. Podrobnejšia informácia je v dátovom súbore, z ktorého je vyrobený aj prípadný graf. Naučíme sa s riešením počiatkových úloh pracovať aj takto.

4.29 Numericky vyriešte a zobrazte riešenie počiatkovej úlohy:

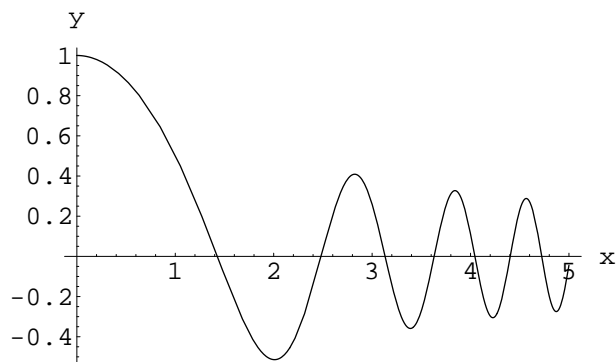
$$y''(x) + (1 + x^3)y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

v intervale $[0, 5]$.

Riešenie: (je na obrázku 4.22)

In[14] :=

```
solution= NDSolve[{y''[x] + (1 + x^3) * y[x] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y, {x, 0, 5}];
Plot[y[x] /. solution, {x, 0, 5}, AxesLabel -> {"x", "y"}];
```



Obrázok 4.22: Vidíme syntax príkazu, ktorý rieši numericky počiatkovú úlohu pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu, ako aj syntax príkazu, ktorý riešenie zobrazí.

4.30 Numericky vyriešte a zobrazte riešenie počiatkovej úlohy:

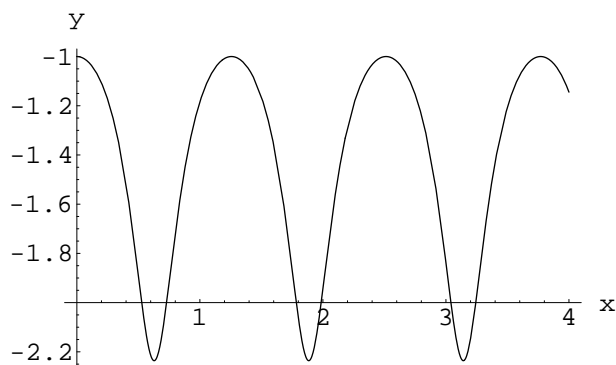
$$y'(x) = \sin(5x)y^3(x), \quad y(0) = -1$$

v intervale $[0, 4]$.

Riešenie: (je na obrázku 4.23)

`In[12] :=`

```
solution = NDSolve[{y'[x] == Sin[5*x] * (y[x])^3, y[0] == -1}, y, {x, 0, 4}];
Plot[y[x] /. solution, {x, 0, 4}, AxesLabel -> {"x", "y"}];
```



Obrázok 4.23: Riešenie počiatkovej úlohy z príkladu 4.30.

4.31 Numericky vyriešte a zobrazte riešenie počiatkovej úlohy:

$$y'''(x) + 4y''(x) + xy(x) = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$$

v intervale $[0, 4]$.

Riešenie: (je na obrázku 4.24)

4.32 Vyriešte počiatkovú úlohu (pre systém rovníc) a riešenie zobrazte:

$$x'(t) - x(t)y(t) = \cos(t), \quad x'(t) - y(t) = 1, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

v intervale $t \in [0, 10]$.

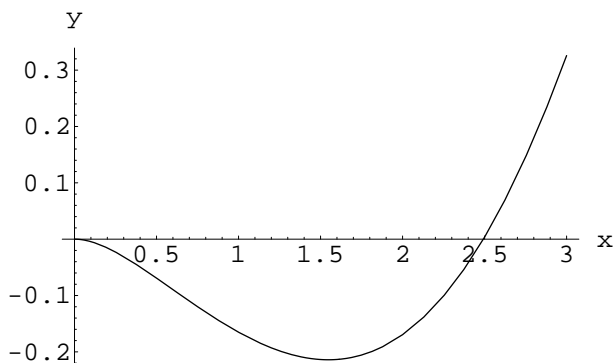
Riešenie: (je na obrázku 4.25)

In[16] :=

```

solution=
NDSolve[{y'''[x] + 4*y''[x] + x*y[x] == x, y[0] == 0, y'[0] == 0, y''[0] == -1}, y, {x, 0, 3}];
Plot[y[x] /. solution, {x, 0, 3}, AxesLabel -> {"x", "y"}];

```



Obrázok 4.24: Riešenie počiatkovej úlohy z príkladu 4.31.

4.33 Numericky vyriešte a zobrazte riešenia počiatkových úloh v uvedených intervaloch:

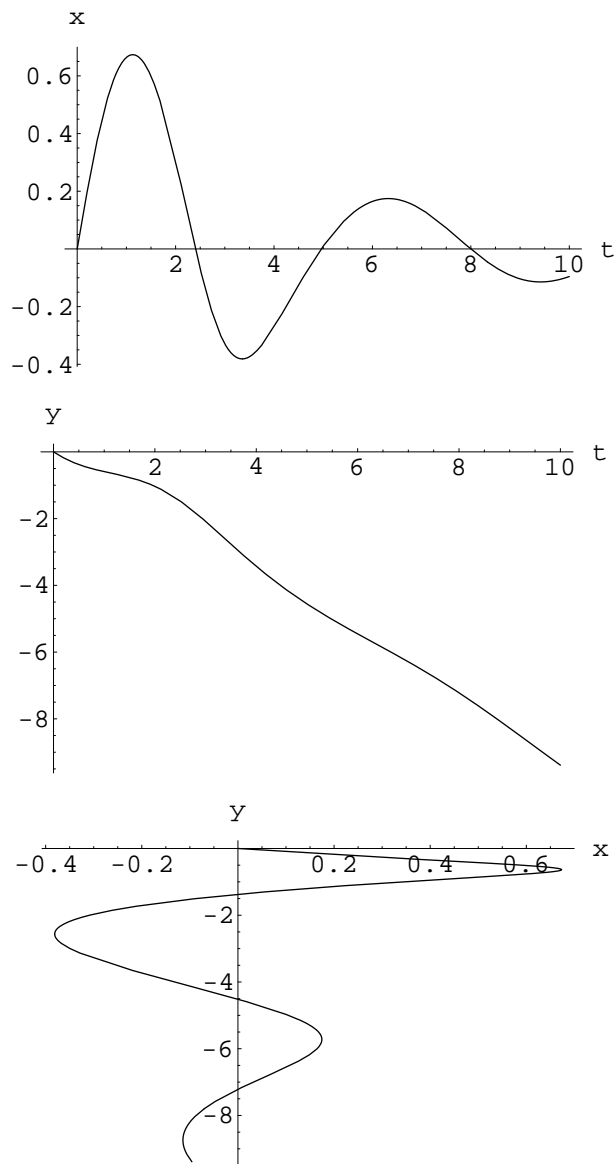
- a) $y''(x) + (1+x)y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 10]$
- b) $y''(x) + (1+x^2)y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 10]$
- c) $y''(x) + \cos(x)y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 10]$
- d) $y''(x) - \cos(x)y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 10]$
- e) $y''(x) + \frac{x}{1+x^2}y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 100]$
- f) $y''(x) + y^2(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 4]$
- g) $y''(x) + y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 40]$
- h) $y''(x) + y(x) = \sin(3x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 40]$
- i) $y''(x) + y^3(x) = \sin(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 40]$
- j) $y''(x) + y(x)y'(x) = \sin(4x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 20]$
- k) $y''(x) + xy(x)y'(x) = \sin(4x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 20]$
- l) $y''(x) + xy(x)y'(x) = \frac{\sin(4x)}{1+x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $x \in [0, 20]$
- m) $y'''(x) + xy(x)y'(x) = \cos(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$ $x \in [0, 20]$
- n) $y'''(x) + xy(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$ $x \in [0, 20]$
- o) $y'''(x) + y^3(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$ $x \in [0, 5]$
- p) $y'''(x) + y^3(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$ $x \in [0, 5]$
- q) $y'''(x) + y^3(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$ $x \in [0, 5]$
- r) $y'''(x) + y^3(x) = -\sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$ $x \in [0, 5]$
- s) $y'(x) = \cos[y(x)], \quad y(0) = 1$ $x \in [0, 2]$
- t) $y'(x) = \cos[y(x)], \quad y(0) = 2$ $x \in [0, 2]$

In[92] :=

```

solution= NDSolve[
  {x'[t] - x[t] * y[t] == Cos[t], x[t] - y'[t] == 1, x[0] == 0, y[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, 10}];
Plot[x[t] /. solution, {t, 0, 10}, AxesLabel->{"t", "x"}];
Plot[y[t] /. solution, {t, 0, 10}, AxesLabel->{"t", "y"}];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. solution], {t, 0, 10}, AxesLabel->{"x", "y"}];

```



Obrázok 4.25: Riešenie počiatkovej úlohy z príkladu 4.32. Posledný graf znázorňuje vzájomný vzťah veličín x a y .

4.7 Homogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami

- Myslí sa tým rovnica

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

kde p, q sú reálne konštanty.

- Jej riešenie hľadáme v tvare

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

so zatiaľ neznámim číslom λ . Dosadením do rovnice zistíme, že λ je riešenie kvadratickej rovnice:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Táto rovnica sa nazýva **charakteristická rovnica**. Riešenie môžeme napísať priamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right].$$

No, v obecnosti nastávajú tri prípady podľa znamienka diskriminantu:

– ak

$$p^2 - 4q > 0$$

tak potom všeobecné riešenie našej diferenciálnej rovnice je

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

– ak

$$p^2 - 4q < 0$$

tak potom si označíme

$$\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

a všeobecné riešenie je

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x} [C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)].$$

– ak

$$p^2 - 4q = 0$$

tak potom máme len jedinú λ a je rovné $\lambda = -p/2$ a všeobecné riešenie je

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

- Nastáva špeciálne zaujímavý prípad, keď $p = 0$ a $q = 1$, čo znamená, že máme diferenciálnu rovnicu

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Vtedy je obecné riešenie len kombináciou sínusu a kosínusu, menovite

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

4.34 Riešte počiatočnú úlohu pre rovnicu druhého rádu

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Riešenie: ide o lineárnu homogénnu rovnicu s konštantnými koeficientami, preto riešenie hľadáme v tvare:

$$e^{\lambda x}.$$

Dostávame rovnicu pre λ :

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Takže obecné riešenie je

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

My potrebujeme vybrať konštanty C_1, C_2 tak aby platili zadané počiatočné podmienky. Z prvej máme:

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

a z druhej:

$$C_1 - 2C_2 = 3C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = -\frac{1}{3},$$

takže riešenie je

$$y(x) = \frac{1}{3} (e^x - e^{-2x}).$$

4.35 Riešte počiatočnú úlohu pre rovnicu druhého rádu

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Riešenie: ide o lineárnu homogénnu rovnicu druhého rádu, ktorej riešenia majú tvar

$$e^{\lambda x},$$

kde

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i,$$

takže obecné riešenie je

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)).$$

Prvá počiatočná podmienka dáva:

$$C_1 = 1.$$

Keďže platí:

$$y'(x) = e^{-x} (-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x)) = e^{-x} [(C_2 - C_1) \cos(x) - (C_1 + C_2) \sin(x)],$$

tak druhá podmienka dáva

$$C_2 - C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = C_1 = 1,$$

a riešenie je

$$y(x) = e^{-x} [\cos(x) + \sin(x)].$$

4.36 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy:

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Riešenie: hľadáme riešenie v tvare $e^{\lambda x}$, kde λ musí riešiť rovnicu

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -3.$$

Takže máme jediné λ (prípád $p^2 - 4q = 0$), t.j. obecné riešenie je

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Počiatkové podmienky znamenajú:

$$1 = C_1, \quad 1 = C_2$$

takže riešenie počiatkovej úlohy je

$$y(x) = e^{-3x}(1 + x).$$

4.37 Riešte počiatkové úlohy pre rovnice druhého rádu

a) $y''(x) + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

b) $y''(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

c) $y''(x) + 4y'(x) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

d) $y''(x) - 4y'(x) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

e) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

f) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 3$

g) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$

h) $y''(x) + 10y'(x) + 20y(x) = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$

4.8 Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami - riešenie metódou variácie konštant

- Jedná sa o rovnicu typu

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x),$$

kde $f(x)$ je zadaná funkcia. Postup pri riešení tejto rovnice rozložíme do nasledovných bodov.

- Najprv vyriešime rovnicu homogénnu:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

čo už vieme z predchádzajúceho odstavca. Tým získame dve lineárne nezávislé riešenia, ktoré si označíme $y_1(x)$ a $y_2(x)$.

4.8 Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami - riešenie metódou variácie konštánt

- Zavedieme funkcie (Wronského determinanty):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}$$

- Nakoniec, všeobecné riešenie našej nehomogénnej rovnice je

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx,$$

kde C_1, C_2 sú ľubovoľné konštanty.

Teraz si odvodíme vyššie uvedený výsledok. Predpokladajme, že y_1 a y_2 sú lineárne nezávislé riešenia homogénnej rovnice

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Všeobecné riešenie našej rovnice má tvar:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y,$$

kde Y je ľubovoľné riešenie nehomogénnej rovnice. Myšlienka je, hľadať funkciu Y v tvare:

$$Y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2,$$

kde γ_1, γ_2 sú nejaké funkcie (variácia konštánt). Tieto funkcie, ako vidíme, sú dve - a máme len jednu podmienku - zadanú diferenciálnu rovnicu. Môžeme preto predpísať ešte jednu podmienku (konzistentnosť preveríme ďalším výpočtom). Zvolíme:

$$\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0.$$

Pomocou tejto podmienky máme:

$$Y' = \gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2', \quad Y'' = \gamma_1' y_1' + \gamma_1 y_1'' + \gamma_2' y_2' + \gamma_2 y_2''.$$

Teraz musí byť splnená rovnica

$$Y'' + pY' + qY = f(x),$$

čiže:

$$\gamma_1' y_1' + \gamma_1 y_1'' + \gamma_2' y_2' + \gamma_2 y_2'' + p(\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2') + q(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = f(x).$$

Využijeme, že y_1, y_2 sú riešenia homogénnej úlohy a posledná rovnosť prejde na:

$$\gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = f(x).$$

Takže pre γ_1, γ_2 máme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 &= 0, \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

4.8 Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami - riešenie metódou variácie konštánt

Sústavu vyriešime Kramerovým pravidlom, čo dá:

$$\gamma_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \equiv \frac{W_1}{W} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \int \frac{W_1}{W} dx$$

$$\gamma_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \equiv \frac{W_2}{W} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \int \frac{W_2}{W} dx$$

Potrebná nenulovosť determinantu W znamená práve, že y_1, y_2 sú lineárne nezávislé.

4.38 Vyriešte počiatočnú úlohu pre nehomogénnu rovnicu:

$$y''(x) + y(x) = \sin(2x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Riešenie: nájdeme najprv všeobecné riešenie homogénnej rovnice

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Toto hľadáme v tvare $e^{\lambda x}$, z čoho dostaneme, že $\lambda^2 + 1 = 0$ a preto hľadané všeobecné riešenie je $C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$. Takže máme funkcie

$$y_1(x) = \cos(x) \qquad y_2(x) = \sin(x)$$

a môžeme zostaviť Wronského determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \sin(2x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -\sin(x) \sin(2x)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \sin(2x) \end{vmatrix} = \cos(x) \sin(2x).$$

Teraz treba vypočítať integrály:

$$\int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = - \int \sin(x) \sin(2x) dx = -2 \int \sin^2(x) \cos(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin(x) \\ du = \cos(x) dx \end{array} \right| = -2 \int u^2 du =$$

$$-\frac{2}{3} u^3 = -\frac{2}{3} \sin^3(x),$$

$$\int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = \int \cos(x) \sin(2x) dx = 2 \int \cos^2(x) \sin(x) dx = -\frac{2}{3} \cos^3(x).$$

Takže všeobecné riešenie našej nehomogénnej rovnice je

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{2}{3} [\cos(x) \sin^3(x) + \sin(x) \cos^3(x)] = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x).$$

4.8 Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami - riešenie metódou variácie konštánt

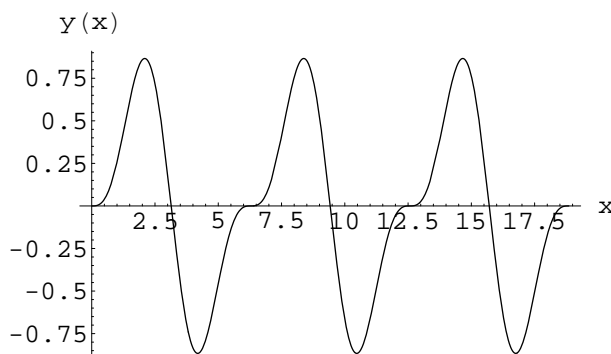
Počiatkové podmienky sú:

$$0 = C_1, \quad 0 = C_2 - \frac{2}{3},$$

takže riešenie vyhovujúce počiatkovým podmienkam je

$$y(x) = \frac{2}{3} \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x).$$

Graf tejto funkcie je na obrázku 4.26.



Obrázok 4.26:

4.39 Vyriešte počiatkovú úlohu pre nehomogénnu rovnicu:

$$y''(x) + y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Riešenie: k riešeniu použijeme výsledky už získané z príkladu 4.38, lebo homogénna rovnica je tá istá: $y''(x) + y(x) = 0$. Takže aj $y_1(x)$, $y_2(x)$ a $W(x)$ sú tie isté. Rôzna je len pravá strana rovnice. Vypočítame $W_1(x)$ a $W_2(x)$:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -\sin^2(x) \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \sin(x) \end{vmatrix} = \cos(x) \sin(x)$$

a príslušné integrály:

$$\int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = - \int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \int [1 - \cos(2x)] dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

$$\int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = \int \cos(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x)$$

Takže môžeme písať obecné riešenie:

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{2}x \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(x) \sin(2x) - \frac{1}{4} \sin(x) \cos(2x) =$$

$$C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{2}x \cos(x) + \frac{1}{4} \sin(x).$$

4.8 Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami - riešenie metódou variácie konštánt

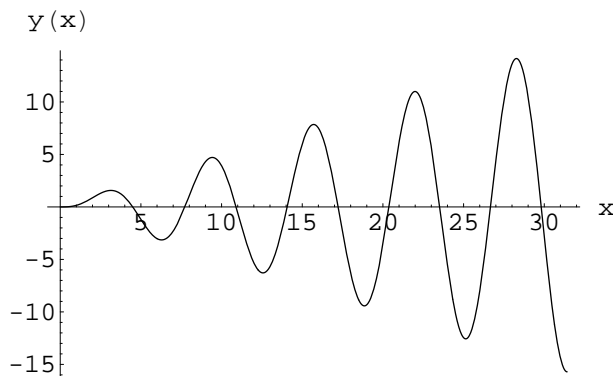
Počiatkové podmienky sú:

$$0 = C_1, \quad 0 = C_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = C_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}$$

a teda riešenie vyhovujúce počiatkovým podmienkam je

$$y(x) = \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2}x \cos(x) + \frac{1}{4} \sin(x) = \frac{1}{2} [\sin(x) - x \cos(x)].$$

Graf riešenia je na obrázku 4.27.



Obrázok 4.27:

4.40 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy:

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Riešenie: riešenia homogénnej úlohy sú:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x},$$

takže Wronského determinanty sú:

$$W = -2, \quad W_1 = -e^{-2x}, \quad W_2 = 1.$$

Takže:

$$\gamma_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x}, \quad \gamma_2 = \int \frac{W_2}{W} dx = -\frac{1}{2} \int 1 dx = -\frac{1}{2} x.$$

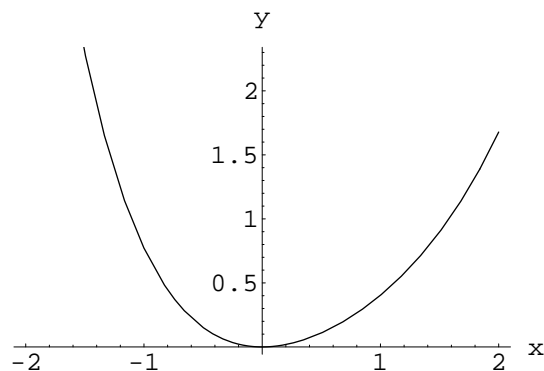
Všeobecné riešenie je preto:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}.$$

Riešenie spĺňajúce počiatkové podmienky je:

$$y = \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}.$$

Graf tejto funkcie je na obrázku 4.28.



Obrázok 4.28:

4.41 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy:

$$y''(x) - y'(x) = e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Riešenie: Mohli by sme znížiť rád rovnice substitúciou: $z = y'$ a pokračovať riešením lineárnej rovnice prvého rádu. Môžeme ale postupovať aj takto: riešenia homogénnej úlohy sú:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x,$$

takže Wronského determinanty sú:

$$W = e^x, \quad W_1 = -\frac{e^x}{1+x^2}, \quad W_2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

A teda:

$$\gamma_1 = -\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\arctan(x), \quad \gamma_2 = \int \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx.$$

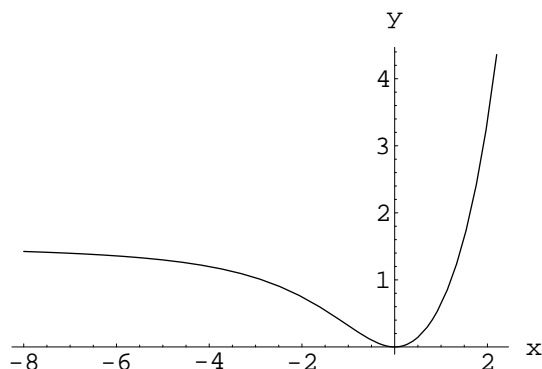
Integrál zadávajúci γ_2 nie je elementárna funkcia. Všeobecné riešenie je teda:

$$y = c_1 + c_2 e^x - \arctan(x) + e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt.$$

Počiatkové podmienky sú splnené pokiaľ $c_1 = c_2 = 0$, takže riešenie počiatkovej úlohy je:

$$y(x) = -\arctan(x) + e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt.$$

Riešenie je zobrazené na grafe 4.29.



Obrázok 4.29:

4.42 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy pre diferenciálne rovnice

- a) $y''(x) + 16y(x) = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0$
- b) $y''(x) + 16y(x) = -x + x^3, y(0) = 1, y'(0) = -1$
- c) $y''(x) + y(x) = -\sin(x), y(0) = 0, y'(0) = 1$
- d) $y''(x) - y(x) = -x, y(0) = 1, y'(0) = 0$
- e) $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = -x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0$
- f) $y''(x) - 4y(x) = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0$
- g) $y''(x) - 4y'(x) = x, y(0) = 0, y'(0) = 0$
- h) $y''(x) + 6y'(x) = -x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0$

4.9 Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami so špeciálnou pravou stranou - riešenie metódou neurčitých koeficientov

V tomto paragrafe si ukážeme efektívnu metódu riešenia špeciálnej podtriedy rovníc diskutovaných v časti 4.8. Menovite sa budeme venovať rovniciam typu:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = \mathcal{P}_n(x),$$

kde funkcia \mathcal{P}_n je polynóm stupňa n , t.j.

$$\mathcal{P}_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

kde $\alpha_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ sú reálne čísla a špeciálne $\alpha_n \neq 0$.

Všeobecné riešenie takejto rovnice je tvaru:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + Y_n(x),$$

kde y_1 a y_2 sú lineárne nezávislé riešenia homogénnej rovnice

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

ktoré sme sa naučili nájsť v paragrafe 4.7. Funkcia Y_n (partikulárne riešenie nehomogénnej úlohy) je znova polynóm, a to:

- $q \neq 0$: stupňa n :

$$Y_n(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0,$$

ktorého koeficienty β_i , $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ sú neznáme čísla, ktoré treba nájsť - preto sa hovorí o metóde neurčitých koeficientov.

- $q = 0$ & $p \neq 0$: stupňa $n + 1$
- $q = 0$ & $p = 0$: stupňa $n + 2$ - tentoraz najditeľný elementárnou integráciou keďže sa jedná o rovnicu:

$$y''(x) = \mathcal{P}_n(x) \Rightarrow y(x) = \int \left(\int \mathcal{P}_n(x) dx \right) dx.$$

4.43 Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = x^2 - 1.$$

Riešenie: charakteristická rovnica pre homogénnu úlohu

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$$

je

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2,$$

preto

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

Partikulárne riešenie Y nehomogénnej úlohy je polynóm stupňa 2:

$$Y(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0.$$

Dosadením do samotnej rovnice zistíme koeficienty β_2 , β_1 a β_0 :

$$2\beta_2 - (2\beta_2 x + \beta_1) - 2(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) = x^2 - 1,$$

alebo teda

$$-2\beta_2 x^2 + (-2\beta_2 - 2\beta_1)x + (2\beta_2 - \beta_1 - 2\beta_0) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1).$$

To znamená, že neznáme koeficienty spĺňajú sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} -2\beta_2 &= 1 \\ -2\beta_2 - 2\beta_1 &= 0 \\ 2\beta_2 - \beta_1 - 2\beta_0 &= -1, \end{aligned}$$

ktorej riešenie je:

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{4}.$$

Takže funkcia Y je

$$Y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},$$

a celkovo, všeobecné riešenie je

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

4.44 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy:

$$y''(x) + y(x) = x^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Riešenie: charakteristická rovnica pre homogénnu úlohu je

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = +i, \quad \lambda_2 = -i,$$

takže všeobecné riešenie je tvaru

$$C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + Y(x),$$

kde

$$Y(x) = \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0.$$

Po dosadení do rovnice máme podmienku na koeficienty β_i , $i = 0, 1, 2, 3$:

$$6\beta_3 x + 2\beta_2 + \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 = x^3,$$

takže:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 1 \\ \beta_2 &= 0 \\ 6\beta_3 + \beta_1 &= 0 \\ 2\beta_2 + \beta_0 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie tejto sústavy lineárnych rovníc je:

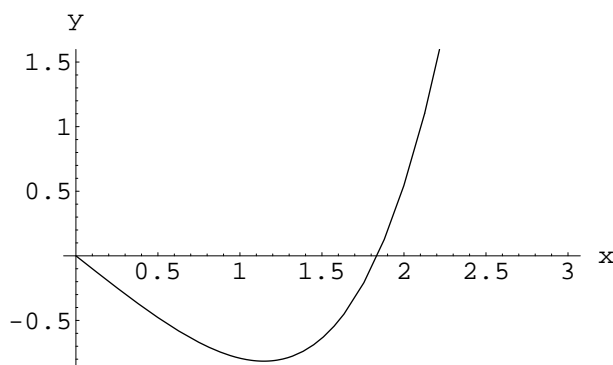
$$\beta_3 = 1 \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_1 = -6 \quad \beta_0 = 0,$$

a teda

$$Y(x) = x^3 - 6x,$$

a všeobecné riešenie zadanej nehomogénnej diferenciálnej rovnice je

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + x^3 - 6x.$$



Obrázok 4.30: Graf riešenia počiatkovej úlohy z príkladu 4.44. Riešenie je zobrazené na okolí počiatkového bodu $x = 0$.

Konštanty C_1 a C_2 zistíme z počiatkových podmienok:

$$C_1 = 0, C_2 - 6 = -1 \Rightarrow C_2 = 5.$$

Takže finálne, riešenie počiatkovej úlohy je

$$y(x) = 5 \sin(x) + x^3 - 6x.$$

Graf tejto funkcie je zobrazený na obrázku 4.30.

4.45 Nájdite riešenie počiatkovej úlohy:

$$y''(x) - 4y'(x) = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Riešenie: charakteristická rovnica pre homogénnu úlohu je

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4.$$

Takže všeobecné riešenie homogénnej úlohy je

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Riešenie nehomogénnej rovnice je polynóm stupňa 2:

$$Y(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x.$$

Určíme jeho koeficienty:

$$2\beta_2 - 8\beta_2 x - 4\beta_1 = x \Rightarrow \beta_2 = -\frac{1}{8}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{16}.$$

Takže všeobecné riešenie nehomogénnej úlohy je

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x$$

a riešenie počiatkovej úlohy:

$$y(x) = -\frac{1}{64} + \frac{1}{64}e^{4x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x.$$

4.46 Vyriešte počiatkové úlohy:

a) $y''(x) + y'(x) = x - 1,$	$y(0) = 0, y'(0) = 0$
b) $y''(x) - y'(x) = x - 1,$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
c) $y''(x) + y'(x) = x^2,$	$y(0) = -1, y'(0) = 0$
d) $y''(x) + 4y(x) = 1,$	$y(0) = 0, y'(0) = -2$
e) $y''(x) - 9y(x) = -1,$	$y(0) = 0, y'(0) = 0$
f) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,$	$y(0) = 0, y'(0) = 0$
g) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = -x^2,$	$y(0) = 0, y'(0) = 0$
h) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = x,$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$

4.10 *Sústavy dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientami*

- Na začiatok budeme pracovať so špeciálnou sústavou rovníc typu:

$$\begin{aligned}\alpha x'(t) + \beta y(t) &= f_1(t) \\ \gamma x(t) + \delta y'(t) &= f_2(t),\end{aligned}$$

kde o koeficientoch α a δ (tie, čo stoja pri zderivovaných funkciách) sa predpokladá, že sú nenulové a ďalej pravé strany $f_1(t)$ a $f_2(t)$ sú známe (diferencovateľné) funkcie. Postup pri riešení takejto sústavy je nasledovný:

- Zderivujeme prvú rovnicu ešte raz a dostaneme:

$$\alpha x''(t) + \beta y'(t) = f_1'(t).$$

Z druhej rovnice zadaného systému si vyjadríme $y'(t)$:

$$y'(t) = \frac{1}{\delta} f_2(t) - \frac{\gamma}{\delta} x(t)$$

a dosadíme do rovnici druhého rádu a máme:

$$\alpha x''(t) - \frac{\beta\gamma}{\delta} x(t) = f_1'(t) - \frac{\beta}{\delta} f_2(t).$$

Toto je ale nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu, ktorú už vieme vyriešiť.

4.47 Vyriešte sústavu:

$$\begin{aligned}x'(t) + 4y(t) &= -t, \\ y'(t) - x(t) &= 0, \\ x(0) = 0, y(0) &= 0\end{aligned}$$

Riešenie: zderivujeme prvú rovnicu a z druhej vyjadríme $y'(t)$:

$$x''(t) + 4y'(t) = -1, \quad y'(t) = x(t) \Rightarrow x''(t) + 4x(t) = -1.$$

Obečným riešením tejto rovnice je

$$x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) - \frac{1}{4}.$$

Takže z prvej rovnice zadaného systému máme:

$$y(t) = -\frac{1}{4}x'(t) - \frac{1}{4}t = \frac{C_1}{2} \sin(2x) - \frac{C_2}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4}t.$$

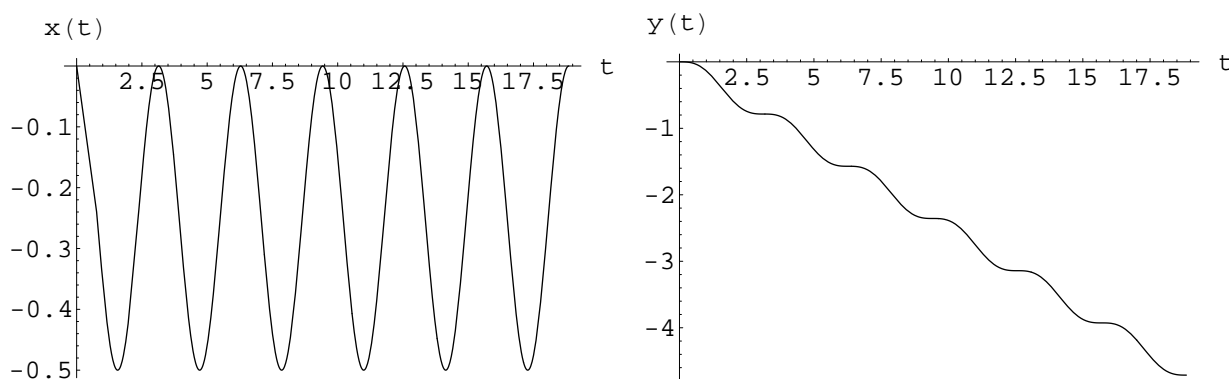
Počiatkové podmienky sú:

$$0 = C_1 - \frac{1}{4}, \quad 0 = -\frac{1}{2}C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}, \quad C_2 = 0.$$

Takže riešenie je:

$$x(t) = \frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{4}, \quad y(t) = \frac{1}{8} \sin(2t) - \frac{1}{4}t.$$

Grafy riešení sú na obrázku 4.31.



Obrázok 4.31:

4.48 Riešte počiatkové úlohy pre systémy diferenciálnych rovníc

- | | | |
|--|--|---|
| <p>$x'(t) + y(t) = 0,$
 a) $y'(t) - x(t) = 0,$
 $x(0) = 1, y(0) = 0$</p> | <p>$x'(t) - 4y(t) = 0,$
 b) $y'(t) - x(t) = 0,$
 $x(0) = 0, y(0) = 1$</p> | <p>$x'(t) + y(t) = 1,$
 c) $y'(t) + x(t) = t,$
 $x(0) = 0, y(0) = 0$</p> |
| <p>$x'(t) + 4y(t) = t,$
 d) $y'(t) - 4x(t) = -t,$
 $x(0) = 0, y(0) = 0$</p> | <p>$x'(t) + 2y(t) = t,$
 e) $y'(t) = -t,$
 $x(0) = 0, y(0) = 0$</p> | <p>$-2x'(t) - 6y(t) = 0,$
 f) $y'(t) = \sin(t),$
 $x(0) = 0, y(0) = 0$</p> |

- Ako druhý krok sa pozrieme na sústavu rovníc typu:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) + by(t), \\y'(t) &= cx(t) + dy(t).\end{aligned}$$

Takúto sústavu môžeme zapísať aj pomocou maticovej formy:

$$X(t)' = AX(t),$$

kde vektor neznámych $X(t)$ je:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

a matica systému A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Predpokladáme, že sústava má riešenie v podobe:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

kde α_1, α_2 a λ sú reálne čísla (ktoré treba zistiť). Dosadíme predpoklad do sústavy a dostávame, že musí platiť:

$$\begin{aligned}\alpha_1(a - \lambda) + \alpha_2 b &= 0 \\ \alpha_1 c + \alpha_2(d - \lambda) &= 0.\end{aligned}$$

Toto je sústava (homogénna) 2 rovníc s neznámymi α_1, α_2 a s parametrom λ . Taká sústava má vždy nulové riešenie - to ale vedie na rovnosť $X(t) = 0$, ktoré je triviálnym riešením a to nás nezaujíma - hľadáme riešenie netriviálne. To existuje práve vtedy keď determinant matice uvedenej sústavy lineárnych rovníc je nula - a to je podmienka na parameter λ , ktorá sa volá *charakteristická rovnica*:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

To znamená, že číslo - teda maximálne dve čísla - λ je riešením rovnice (kvadratickej):

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

Následne spočítame vzťah medzi α_1 a α_2 a máme výsledok. Rovnako ako v situácii s lineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu sa ale môže stať, že máme len jedno číslo λ (dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice). V tomto prípade je okrem dvojici funkcií:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

riešením (podobne ako v prípade jednej rovnice druhého rádu) aj dvojica:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 t \\ \gamma_0 + \gamma_1 t \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

kde γ, β sú reálne konštanty ktoré treba zistiť dosadením do pôvodnej sústavy.

4.49 Uvažujme nasledovný rádioaktívny rad: jadrá typu 1 s rozpadovou konštantou λ_1 sa rozpadajú na jadrá typu 2 s rozpadovou konštantou λ_2 . Nech je na začiatku počet jadier typu 1 rovný N_0 a niet žiadnych jadier typu 2. Ako bude vypadáť časový priebeh počtu jadier typu 1 a typu 2?

Riešenie: nech $N_1(t)$ ($N_2(t)$) je počet jadier typu 1 (2) v čase t , potom podľa zákona rozpadu musí platiť:

$$\begin{aligned} N_1'(t) &= -\lambda_1 N_1(t) \\ N_2'(t) &= +\lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t). \end{aligned}$$

Okomentujme najprv naše predbežné očakávania: funkcia $N_1(t)$ musí byť klesajúca, nakoľko jadrá typu 1 sa len rozpadajú. Funkcia $N_2(t)$ musí byť pre malé hodnoty t rastúca nakoľko žiadne jadrá typu 2 v čase $t = 0$ nemáme a rozpadom jadier typu 1 nejaké vzniknú. Ako sa však bude mýňať zdroj jadier typu 2, teda jadrá typu 1, tak musí začať klesať aj $N_2(t)$. Preto očakávame, že funkcia $N_2(t)$ bude mať maximum. Prejdime teraz k technickým detailom.

Hľadáme riešenie

$$N(t) = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$$

v tvare:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{at}.$$

Potom musí číslo a spĺňať charakteristickú rovnicu

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda_1 - a & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 - a \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a) = 0 \Rightarrow a = -\lambda_1 \vee a = -\lambda_2.$$

Ak predpokladáme, že čísla λ_1 a λ_2 sú rôzne, tak potom máme dve nezávislé riešenia:

$$\checkmark a = -\lambda_1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -c_1 \lambda_1 &= -c_1 \lambda_1 \\ -c_2 \lambda_1 &= c_1 \lambda_1 - c_2 \lambda_2, \end{aligned}$$

takže medzi c_1 a c_2 je vzťah:

$$c_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} c_1,$$

a teda prvé riešenie je:

$$N^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} e^{-\lambda_1 t}.$$

$$\checkmark a = -\lambda_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -c_1 \lambda_2 &= -c_1 \lambda_1 \\ -c_2 \lambda_2 &= c_1 \lambda_1 - c_2 \lambda_2, \end{aligned}$$

takže $c_1 = 0$ a c_2 je ľubovoľné. Takže druhé riešenie je:

$$N^{(ii)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda_2 t}.$$

Všeobecné riešenie je teda lineárna kombinácia predchádzajúcich:

$$N(t) = \alpha N^{(i)}(t) + \beta N^{(ii)}(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda_2 t}.$$

Potrebuje vybrať konštanty α, β tak, aby bola splnená počiatočná úloha:

$$N_1(0) = N_0, \quad N_2(0) = 0.$$

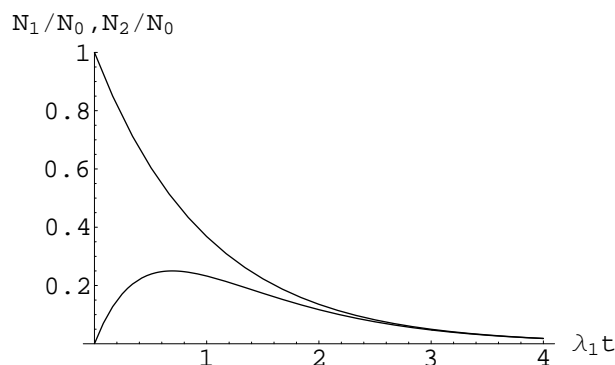
To implikuje:

$$\alpha = N_0 \quad \beta = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0.$$

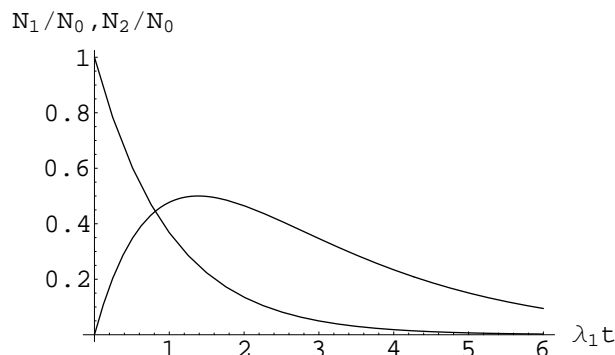
Takže, riešenie je:

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}, \quad N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Spoločné zobrazenie funkcií N_1 a N_2 je znázornené na grafoch 4.32 a 4.33.



Obrázok 4.32: Závislosť $N_1(t)/N_0$ a $N_2(t)/N_0$ pre výber $\lambda_2 = 2\lambda_1$ - ukazuje typický vzťah funkcií N_1 a N_2 pri $\lambda_2 > \lambda_1$ (t.j. jadrá typu 2 sa rozpadajú rýchlejšie ako jadrá typu 1).



Obrázok 4.33: Závislosť $N_1(t)/N_0$ a $N_2(t)/N_0$ pre výber $\lambda_2 = 1/2\lambda_1$ - ukazuje typický vzťah funkcií N_1 a N_2 pri $\lambda_2 < \lambda_1$ (t.j. jadrá typu 2 sa rozpadajú pomalšie ako jadrá typu 1).

Nájdeme ešte, v ktorom čase t_M sa dosahuje maximum počtu jadier typu 2. Podmienka na extrém je: $N_2(t_M)' = 0$, čo znamená:

$$-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_M} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_M} = 0 \Rightarrow t_M = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

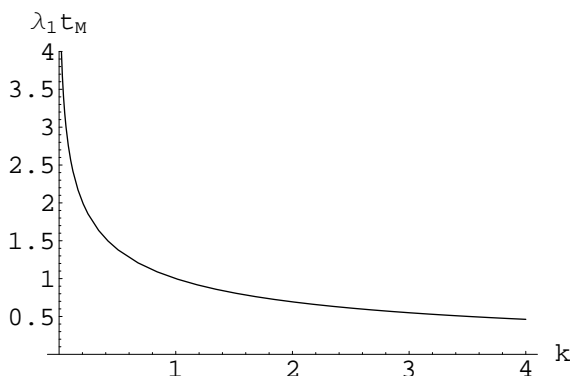
Vzťah medzi λ_1 a λ_2 iste možno zapísať takto:

$$\lambda_2 = k\lambda_1, \quad k \in (0, \infty).$$

Vtedy môžeme zapísať podmienku na čas t_M takto:

$$\lambda_1 t_M = \frac{\ln(k)}{k - 1}.$$

Táto bezrozmerná závislosť určuje polohu času (v násobku charakteristického času rozpadu $1/\lambda_1$ jadier typu 1) v ktorom je maximum jadier typu 2 v závislosti na tom, aký je pomer medzi rozpadovými konštantami λ_1 a λ_2 . Závislosť $\lambda_1 t_M$ od k je znázornená na obrázku 4.34 - vidíme, že súčin $\lambda_1 t_M$ klesá s rastúcim k .



Obrázok 4.34:

Teraz sa vráťme k situácii $\lambda_1 = \lambda_2$ a túto spoločnú hodnotu označme λ . Rovnice riadiace rozpadový rad sú:

$$\begin{aligned} N_1'(t) &= -\lambda N_1(t) \\ N_2'(t) &= \lambda(N_1(t) - N_2(t)). \end{aligned}$$

Poučený z predchádzajúceho vidíme, že

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Preto treba vyriešiť len rovnicu pre N_2 :

$$N_2'(t) + \lambda N_2(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Je to nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú vyriešime ľahko metódou variácie konštanty:

$$N_2(t) = C(t)e^{-\lambda t} \Rightarrow C'(t) = \lambda N_0 \Rightarrow C(t) = \lambda N_0 t + \hat{N},$$

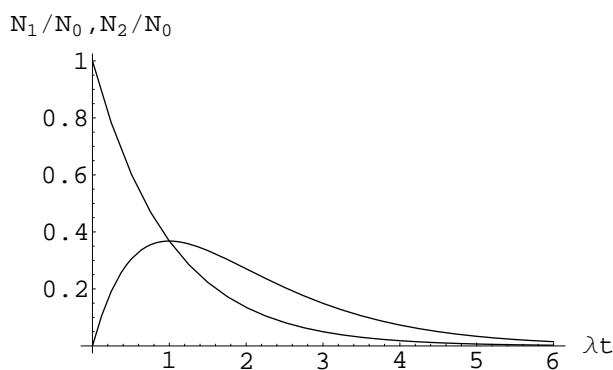
kde \hat{N} je integračná konštanta. Funkcia N_2 je preto:

$$N_2(t) = (\lambda N_0 t + \hat{N})e^{-\lambda t}.$$

Počiatočná podmienka $N_2(0) = 0$ znamená, že $\hat{N} = 0$, takže finálne máme riešenie nášho systému:

$$N(t) = N_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda t \end{pmatrix} e^{-\lambda t}.$$

Funkcie N_1, N_2 sú pre tento prípad znázornené na obrázku 4.35.



Obrázok 4.35: Závislosť $N_1(t)/N_0$ a $N_2(t)/N_0$ pre výber $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ - ukazuje typický vzťah funkcií N_1 a N_2 v prípade, že sa jadrá typu 2 sa rozpadajú rovnako rýchlo ako jadrá typu 1).

Maximum počtu jadier typu 2 sa dosahuje v čase t_M , ktorý je určený podmienkou: $N_2(t_M)' = 0$, čo znamená, že:

$$N_0 \lambda e^{-\lambda t_M} (1 - \lambda t_M) = 0 \Rightarrow t_M = \frac{1}{\lambda}.$$

Kapitola 5

Elementy teórie funkcie dvoch premenných

5.1 Definičný obor, graf funkcie 2 premenných

5.1 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

a nakreslite rezy grafu tejto funkcie rovinami $x = 0$, $y = 0$ a $z = \text{const}$.

Riešenie: funkcia logaritmus je definovaná pre kladné hodnoty svojho argumentu, takže v našom prípade musí byť:

$$x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0),$$

takže naša funkcia je definovaná všade s výnimkou počiatku súradníc. Rezy grafu rovinami $y = 0$, resp. $x = 0$:

$$f(x, 0) = \ln(x^2) = 2 \ln(|x|), \quad f(0, y) = \ln(y^2) = 2 \ln(|y|).$$

Taže tieto rezy sú rovnaké! Pozrieme sa na vrstevnice - teda rezy rovinami $z = \text{const}$. Ponajprv si uvedomíme, že funkcia $\ln(x^2 + y^2)$ nadobúda všetky reálne hodnoty, preto rovnosť

$$\ln(x^2 + y^2) = c \Rightarrow x^2 + y^2 = e^c$$

má zmysel pre každé $c \in \mathbb{R}$. Uvedená rovnosť ale nie je nič iné ako rovnica kružnice, ktorá má stred v bode $(x, y) = (0, 0)$ a má polomer $\sqrt{e^c}$. Grafy rezov funkcie $\ln(x^2 + y^2)$ sú na obrázku 5.1. Graf funkcie $\ln(x^2 + y^2)$ z dvoch pohľadov je na obrázku 5.2.

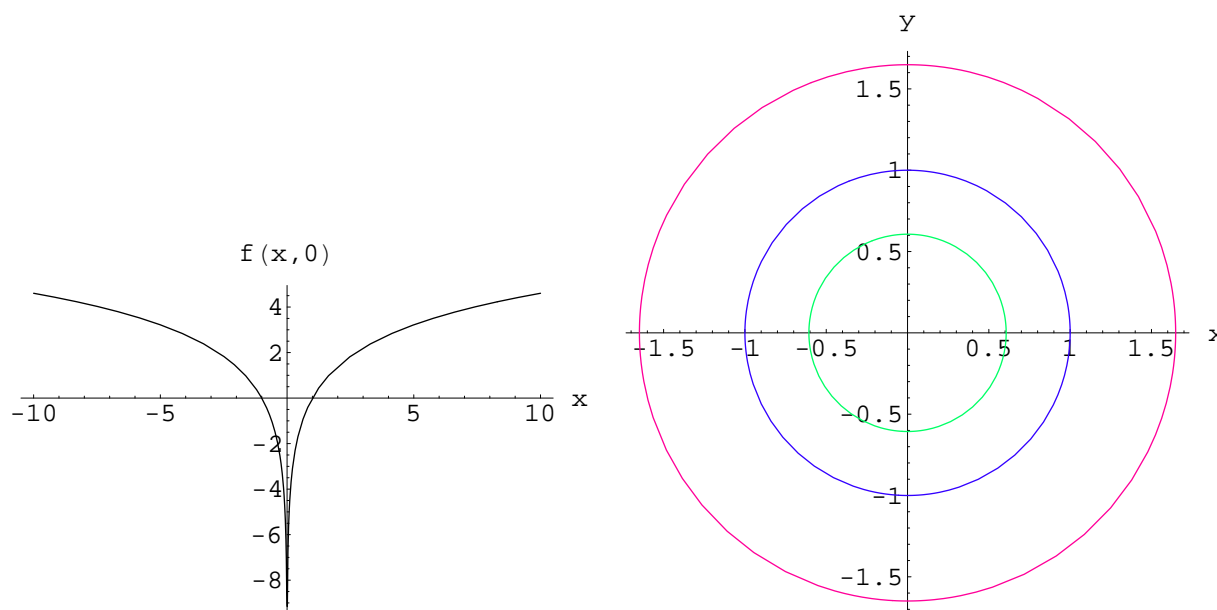
5.2 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

a nakreslite rezy grafu tejto funkcie rovinami $x = 0$, $y = 0$.

Riešenie: druhá odmocnina je definovaná práve len pre nezápornú hodnotu svojho argumentu, takže pre definičný obor našej funkcie máme obmedzenia:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 9 - x^2 - y^2 \geq 0.$$



Obrázok 5.1: Vľavo: rez grafu funkcie $\ln(x^2 + y^2)$ rovinou $y = 0$; poznamenajme, že rez rovinou $x = 0$ vypadá presne rovnako. V pravo: vrstevnice grafu funkcie $\ln(x^2 + y^2)$ s $c = -1, 0, +1$.

Prvé dve nerovnosti sú zrejmé, tretiu si zapíšeme v tvare:

$$x^2 + y^2 \leq 9 = 3^2,$$

čo je vnútro kružnice so stredom v počiatku súradníc a polomerom 3. Spolu s ostatnými dvomi nerovnosťami to znamená, že definičný obor je vnútro a hranica výseku kruhu polomeru 3 ležiaceho v prvom kvadrante. Rez rovinou $y = 0$ a $x = 0$:

$$f(x, 0) = \sqrt{x} + \sqrt{9 - x^2} \qquad f(0, y) = \sqrt{y} + \sqrt{9 - y^2}.$$

Vidíme, že tieto rezy sú zase formálne zhodné. Na obrázku 5.3 sú vyobrazené spolu s celkovým grafom funkcie.

5.3 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = x^2 - y^4.$$

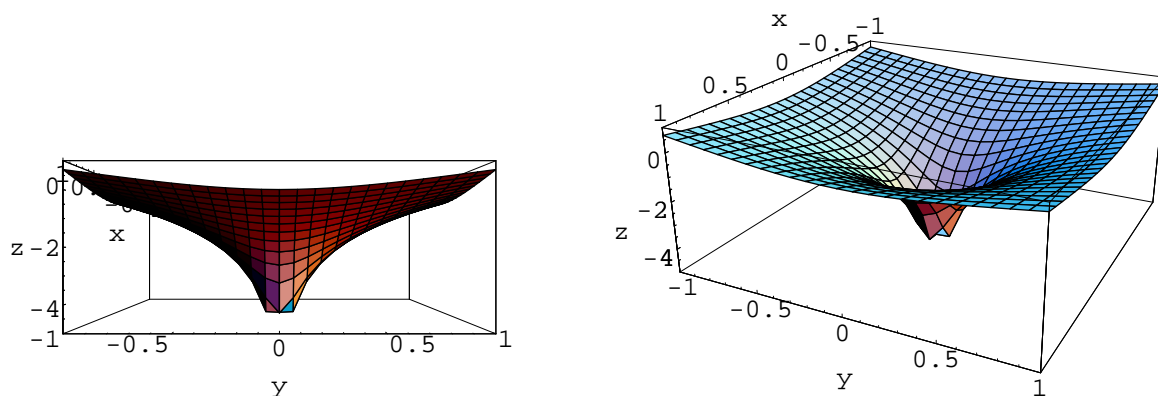
a nakreslite rezy grafu tejto funkcie rovinami $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$.

Riešenie: definičný obor tejto funkcie je zjavne celá rovina. Pozrieme sa na požadované rezy: rezy grafu funkcie rovinami xz a yz sú grafmi jednoduchých funkcií:

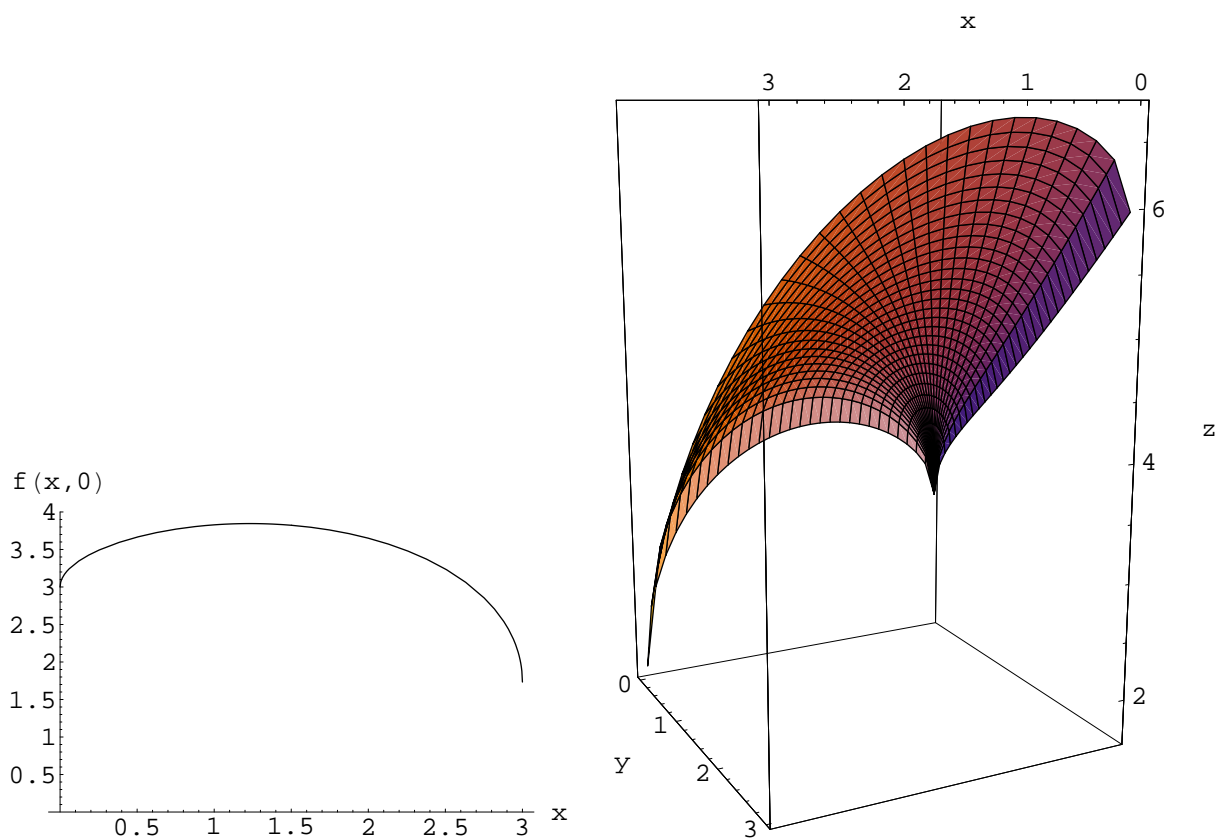
$$f(x, 0) = x^2, \qquad f(0, y) = -y^4.$$

Rez rovinou xy je krivka daná predpisom:

$$x^2 - y^4 = 0.$$



Obrázok 5.2: Graf funkcie $\ln(x^2 + y^2)$; v ľavo pohľad z bodu $(2, 0, 0)$, v pravo pohľad z bodu: $(2, 1, 0.9)$. Singularita pri $(x, y) = (0, 0)$ nie je až tak zreteľná, ale pripomíname, že tam je!

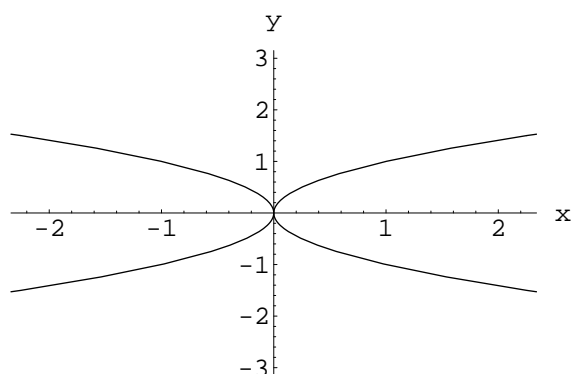
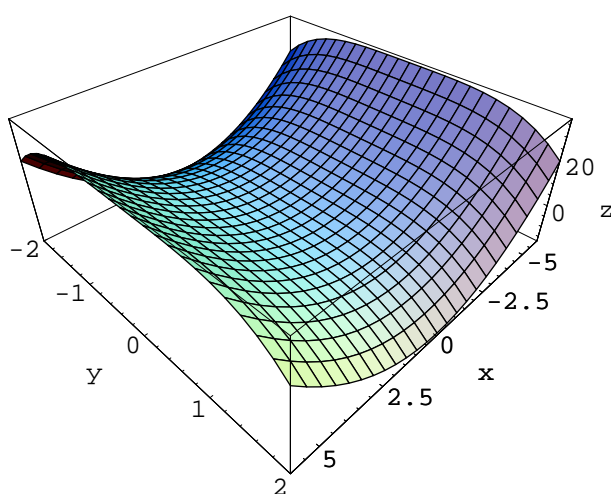


Obrázok 5.3: V ľavo: graf rezu funkcie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ rovinou $y = 0$. V pravo: celkový graf funkcie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ pri pohľade z bodu $(1, 2, 0.5)$.

Tento predpis si prepíšeme do tvaru:

$$(x - y^2)(x + y^2) = 0,$$

ktorý nám umožňuje požadovaný rez jednoducho znázorniť - viď obrázok 5.4. Graf samotnej funkcie f je znázornený na obrázku 5.5.

Obrázok 5.4: Rez grafu funkcie z príkladu 5.3 rovinou $z = 0$ (t.j. rovinou xy).Obrázok 5.5: Grafu funkcie f z príkladu 5.3 definovanej v okolí bodu $(0, 0)$ - je to typická sedlová plocha.

5.4 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

a zostrojte jej graf.

Riešenie: definičný obor zadanej funkcie je zjavne množina tých bodov roviny, v ktorých je menovateľ zadaného zlomku nenulový, t.j. $D(f)$ je celá rovina okrem kružnice:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Graf funkcie si efektívne predstavíme takto: opíšeme rovinu nie pomocou kartézskych súradníc (x, y) ale pomocou polárnych súradníc (r, ϕ) zadaných vzťahmi:

$$x = r \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\phi)$$

resp. inverznými vzťahmi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

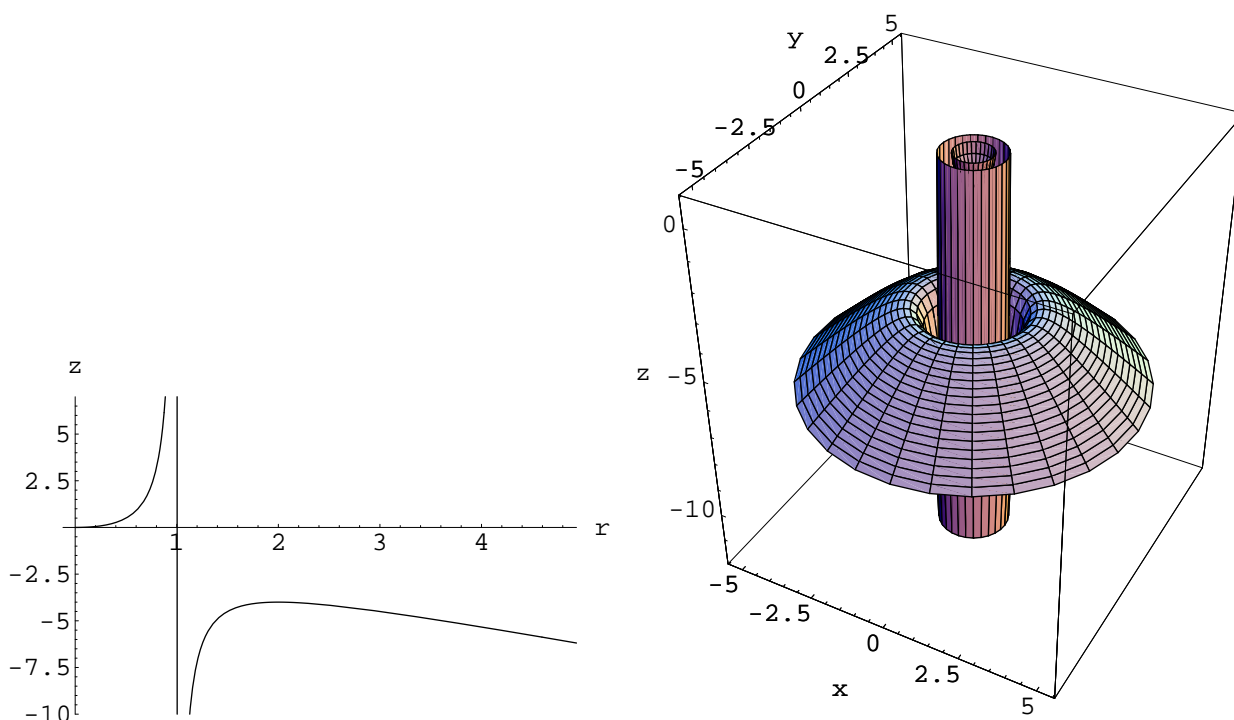
$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Význam súradníc (r, ϕ) je jasný - súradnica r je vzdialenosť od $x = y = 0$ a ϕ je uhol medzi kladnou poloosou x a spojnicou zvoleného bodu a stredom kartézskych súradníc. Čiara konštantného r je kružnica so stredom v počiatku kartézskych súradníc a s polomerom r a čiara konštantného ϕ je polpriamka idúca zo stredy kartézskych súradníc zvierajúca s kladnou poloosou x uhol ϕ .

Zapišeme hodnoty našej funkcie f v polárnych súradniciach:

$$\frac{x^2 + y^2}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2}{1 - r}.$$

Takto máme funkciu JEDNEJ premnnej r definovanú pre všetky nezáporné hodnoty r okrem jedinej hodnoty $r = 1$ - t.j. f nezávisí od uhla ϕ - to ale znamená, že graf je symetrický (invariantný) voči rotáciám okolo osi z . Takže ak nakreslíme graf funkcie premennej r a potom ho zrotujeme okolo osi z dostaneme graf funkcie f - bude to **ROTAČNÁ PLOCHA**. Uvedené grafy sú znázornené na obrázku 5.6.



Obrázok 5.6:

5.5 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = \sin [(x^2 + y^2)^{1/3}]$$

a zostrojte jej graf.

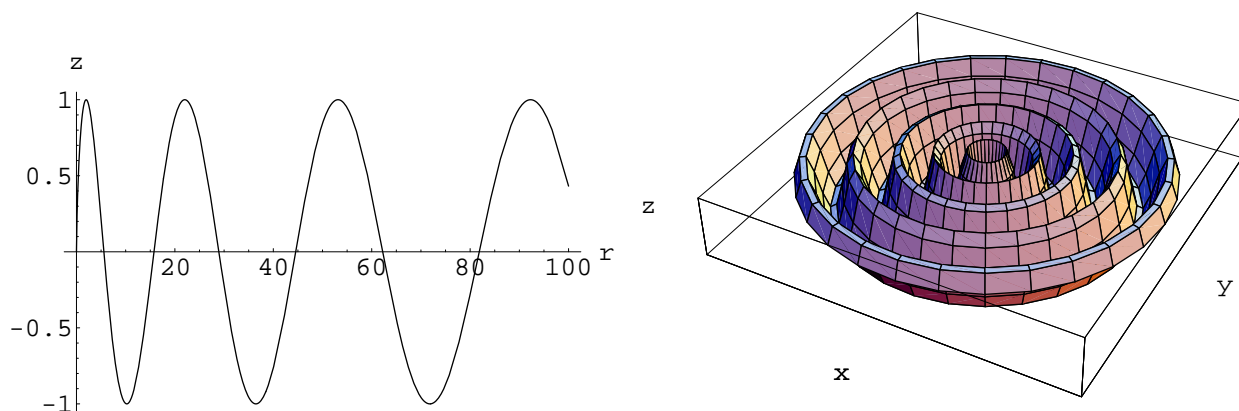
Riešenie: definičný obor zadanej funkcie je zrejme celá rovina. Graf funkcie znova efektívne zostrojíme v polárnych súradniciach: (r, ϕ) ; $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, pretože:

$$\sin [(x^2 + y^2)^{1/3}] = \sin (r^{2/3}).$$

Takže graf je znovu rotačná plocha, ktorá vzniká rotáciou krivky:

$$(r, \sin(r^{2/3})), \quad r \geq 0.$$

Graf tejto krivky aj graf pôvodnej funkcie sú znázornené na obrázku 5.7.



Obrázok 5.7:

5.6 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2}.$$

Riešenie: definičným oborom uvažovanej funkcie je zrejme množina bodov roviny pre ktoré platí nerovnosť:

$$x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2 \geq 0.$$

Toto iste nie je celá rovina, napríklad žiadny bod typu: $(0, y)$, $y \neq 0$ do $D(f)$ nepatrí. Hranica $D(f)$ je určená rovnosťou:

$$x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0,$$

ktorú zapíšeme v polárnych súradniciach:

$$r^2 \cos(2\phi) - r^4 = 0.$$

Z tejto rovnosti plynie (s uvážením špeciálneho prípadu $r = 0$), že rovnica hranice $D(f)$ v polárnych súradniciach sa dá prepísať do tvaru:

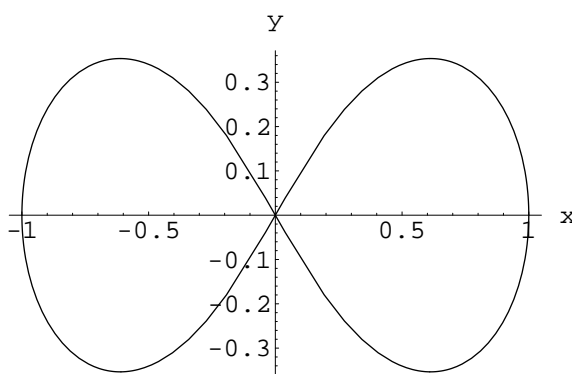
$$r = \sqrt{\cos(2\phi)}.$$

Z toho plynie, že prípustné sú len nasledovné hodnoty uhla ϕ : $\phi \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$. Hranica $D(f)$ je znázornená na obrázku 5.8, samotný $D(f)$ je vnútri ukázanej krivky (lemniskáty) - ako sa možno ľahko presvedčiť.

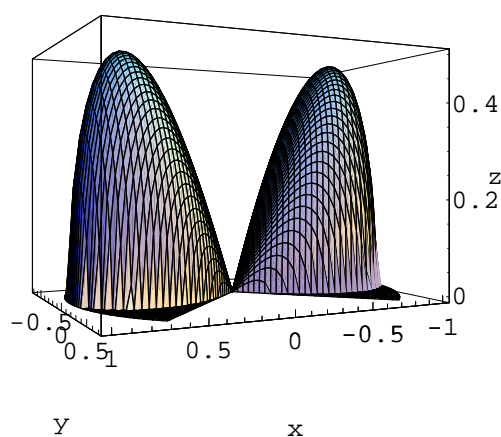
Samotná funkcia f sa vyjadruje v polárnych súradniciach nasledovne:

$$f = r\sqrt{\cos(2\phi) - r^2}.$$

Graf funkcie f je znázornený na obrázku 5.9.



Obrázok 5.8:



Obrázok 5.9:

5.7 Nájdite definičný obor funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + (x + x^2 + y^2)^2}$$

a zostrojte jej graf.

Riešenie: definičným oborom uvažovanej funkcie je zrejme celá rovina, nakoľko menovateľ výrazu zadávajúceho f je iste kladný pre každé (x, y) . K zostrojeniu grafu funkcie urobíme nasledovnú úvahu. Upravíme kvadratický výraz na úplný štvorec:

$$f = \frac{1}{1 + \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \right]^2}.$$

Úprava nás motivuje zaviesť posunuté kartézské súradnice (x', y') nasledovne:

$$x' = x + \frac{1}{2}, \quad y' = y.$$

V týchto súradniciach uvažovaná funkcia má tvar:

$$f = \frac{1}{1 + \left[(x')^2 + (y')^2 - \frac{1}{4} \right]^2}$$

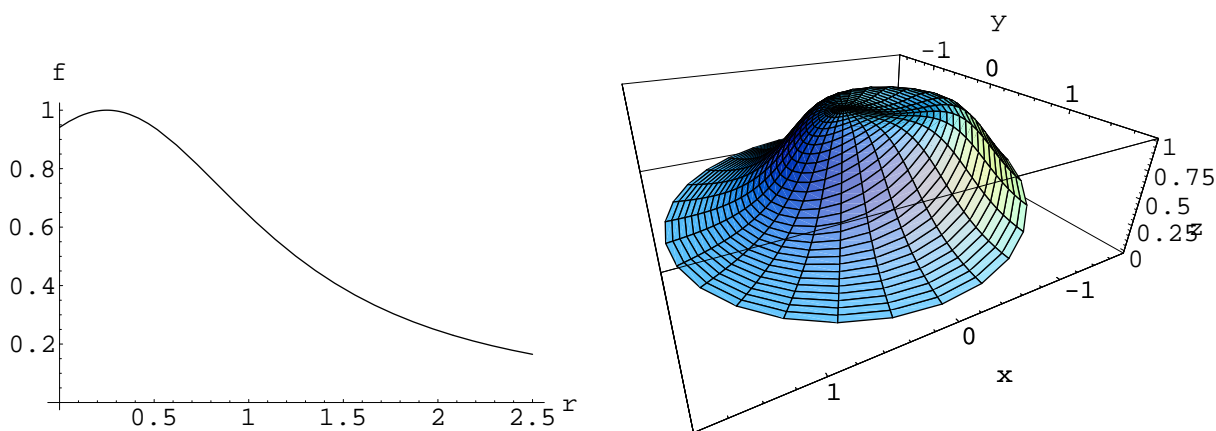
Zavedieme teraz polárne súradnice voči posunutým kartézskym súradniciam:

$$x' = r \cos(\phi), \quad y' = r \sin(\phi).$$

Pomocou týchto súradníc sa f vyjadruje nasledovne:

$$f = \frac{1}{1 + \left[(r')^2 - \frac{1}{4} \right]^2}.$$

Takže pri pohľade z bodu roviny: $(-1/2, 0)$ je graf funkcie f rotačne symetrický a vzniká rotáciou krivky, ktorá je grafom funkcie jednej premennej r uvedenej vyššie. Graf funkcie f je znázornený na obrázku 5.10.



Obrázok 5.10:

5.8 Nájdite definičné obory nasledovných funkcií (a načrtnite ich do roviny Oxy)

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| a) $f(x, y) = \frac{1}{xy + 1}$ | b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x - y}}{x + y}$ | c) $f(x, y) = \sin(xy - 1)$ |
| d) $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$ | e) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ | f) $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$ |
| g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ | h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ | i) $f(x, y) = \tan(xy)$ |
| j) $f(x, y) = \arctan(xy)$ | k) $f(x, y) = \frac{1}{4 - \sqrt{xy}}$ | l) $f(x, y) = \ln(x - y)$ |
| m) $f(x, y) = \ln(xy + 1)$ | n) $f(x, y) = \exp\left(\frac{x}{y}\right)$ | o) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{xy}$ |

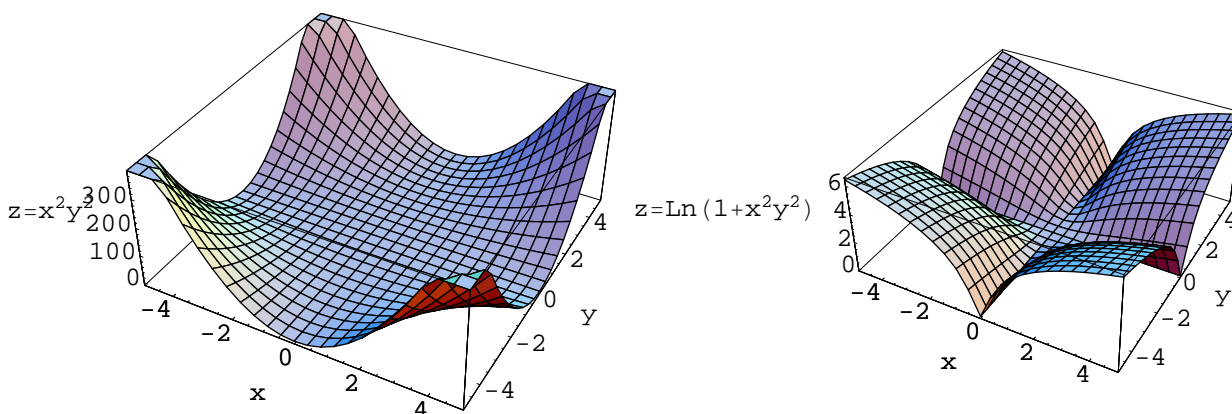
5.9 Nájdite grafy rezov nasledovných funkcií súradnicovými rovinami $x = 0$ a $y = 0$

- | | | |
|---------------------------------|--|------------------------------|
| a) $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$ | b) $f(x, y) = \sin(x + y)$ | c) $f(x, y) = 1 + xy$ |
| d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ | e) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ | f) $f(x, y) = 1 - x^4 + y^4$ |

5.10 Nakreslite rezy grafu funkcií $z = f(x, y)$ rovinou $z = C (= const)$ a súradnicovými rovinami $x = 0$ a $y = 0$; pomocou toho možno zostrojiť (ako tak) graf funkcie f .

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ c) $f(x, y) = xy$ d) $f(x, y) = x^2y^2$

Na obrázku 5.11 je znázornený graf funkcie $f(x, y) = x^2y^2$.



Obrázok 5.11:

5.2 Okolie bodu roviny, lokálne extrémny funkcie dvoch premenných

- nech $\epsilon > 0$, potom štvorcovým ϵ -okolím bodu (x_0, y_0) voláme množinu (štvorec bez hranice so stredom v (x_0, y_0) s dĺžkou strany 2ϵ):

$$O_r^\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \epsilon\}$$

- nech $\epsilon > 0$, potom diskovým (kruhovým) ϵ -okolím bodu (x_0, y_0) voláme množinu (kruh bez hranice so stredom v (x_0, y_0) s polomerom ϵ):

$$O_d^\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon^2\}$$

- nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná v nejakom okolí bodu A , hovoríme, že funkcia f má v bode A lokálne minimum ak existuje také okolie $O_r^\epsilon(A)$, že pre všetky $(x, y) \in O_r^\epsilon(A)$ je

$$f(x, y) \geq f(A).$$

- nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná v nejakom okolí bodu A , hovoríme, že funkcia f má v bode A lokálne maximum ak existuje také okolie $O_r^\epsilon(A)$, že pre všetky $(x, y) \in O_r^\epsilon(A)$ je

$$f(x, y) \leq f(A).$$

- v definícii lokálneho maxima ako i lokálneho minima možno bez zmeny významu definície nahradiť štvorcové okolie bodu A : $O_r^\epsilon(A)$ okolím diskovým bodu A : $O_d^\epsilon(A)$.

5.11 K zadaným funkciám a nájdite diskové O_d a štvorcové O_r okolia (nakreslite ich) zadaných bodov (x_0, y_0) , tak aby v týchto okoliach $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$, pre zadané ϵ .

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\epsilon = 1$
 b) $f(x, y) = xy$, $(x, y) = (0, 0)$, $\epsilon = 2$
 c) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $(x, y) = (\pi, 0)$, $\epsilon = 0.5$

5.12 Rozhodnite, či zadané funkcie majú v bode $(0, 0)$ lokálny extrém

- a) $f(x, y) = x + y$ b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ c) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
 d) $f(x, y) = 1 - x - y$ e) $f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2)$ f) $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$

Graf funkcie $f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2)$ nájdete tiež na obrázku 5.11.

5.3 Postupnosť bodov roviny, limita postupnosti

- Body roviny reprezentujeme ako usporiadané dvojice (x, y) reálnych čísel (používame kartézské súradnice!). Nech $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť bodov roviny. Nech $A_n = (x_n, y_n)$. Potom hovoríme, že postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k bodu $A = (x, y)$ práve vtedy keď:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Píšeme aj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

- Ekvivalentne možno zaviesť limitu postupnosti aj pomocou pojmu okolia bodu: hovoríme, že postupnosť bodov roviny $A_n = (x_n, y_n)$ konverguje k bodu roviny A ak pre každé kladné číslo ϵ existuje také celé kladné číslo N_ϵ , že pre každé $n > N_\epsilon$ leží A_n v $O_r^\epsilon(A)$.
- V predchádzajúcej definícii možno bez zmeny významu definície zmeniť štvorcové okolie $O_r^\epsilon(A)$ zameniť za diskové okolie $O_d^\epsilon(A)$.

5.13 Nájdite limitu postupností bodov roviny $\{A_n\}_{n=1}^\infty$.

a) $A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+2}\right)$ b) $A_n = \left(\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}, \frac{n^2}{n+1}\right)$

Riešenie: vyjdeme z prvej definície limity. Preveríme oba príklady:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

takže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = (0, 1).$$

b)

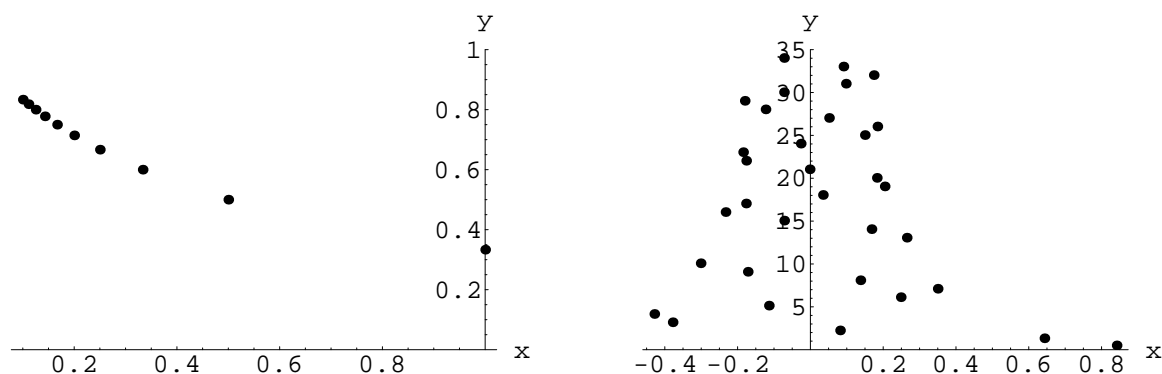
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$$

takže limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

NEEXISTUJE.

Obe postupnosti sú zobrazené na obrázku 5.12.



Obrázok 5.12:

5.14 Nájdite limitu postupností bodov roviny $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a) $A_n = \left(\frac{\ln(n)}{n}, \frac{1-n}{n^2-3} \right)$

b) $A_n = (\sin(1/n), \cos(1/n))$

c) $A_n = \left(\frac{1+n-n^2}{1+n+n^2}, \frac{n^3}{5-3n^3} \right)$

d) $A_n = \left(\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right), \frac{\arctan(n)}{n} \right)$

5.4 Spojitosť a limita funkcie dvoch premenných

Nech funkcia f je definovaná v niektorom okolí O^1 bodu A . Ak pre každú postupnosť bodov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ z O takú čo konverguje k A platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n) = f(A)$$

tak hovoríme, že f je **spojitá** v bode A .

¹diskovom alebo štvorcovom

Pojem spojitosti funkcie (definovanej v okolí bodu A) v bode A možno zaviesť ekvivalentne len s pomocou pojmu okolia, a to nasledovne:

- f je spojitá v A práve vtedy keď ku každému kladnému číslu ϵ existuje také kladné číslo δ , že pre každé B z roviny, také že $B \in O_\delta(A)$ je $|f(A) - f(B)| < \epsilon$.

V predchádzajúcom príklade možno znova zameniť diskové okolie okolím štvorcovým a to bez zmeny významu pojmu spojitosti.

Zavedieme pojem limity funkcie dvoch premenných. Nech je f definovaná v nejakom okolí \mathcal{S} bodu A prípadne s výnimkou bodu A . Ak existuje také číslo L , že pre každú postupnosť bodov roviny ležiacu v \mathcal{S} , ktorá konverguje do A , platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n) = L$$

tak číslo L voláme limita funkcie f v bode A a píšeme

$$L = \lim_{B \rightarrow A} f(B).$$

Prípadne ak označíme $A = (x_0, y_0)$ tak používame aj zápis:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$$

Spojením predchádzajúcich pojmom spojitosti a limity máme tvrdenie:

- funkcia f je spojitá v bode A práve vtedy keď:

$$\lim_{B \rightarrow A} f(B) = f(A).$$

5.15 Preskúmame spojitosť funkcie

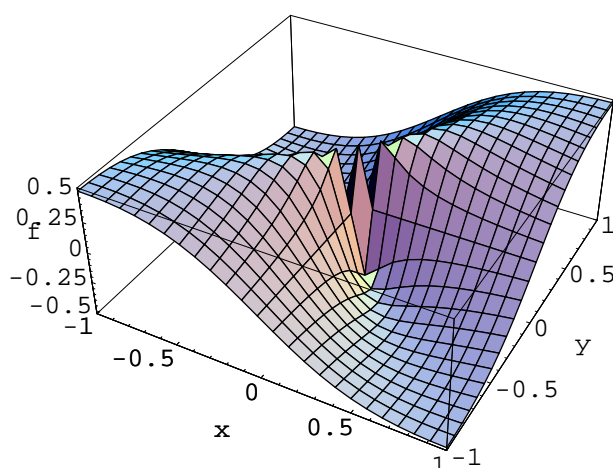
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Riešenie: uvedená funkcia je zrejme definovaná všade v rovine. Vezmime v rovine nasledovné smery: $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Vypočítajme limity zadanej funkcie v bode $(0,0)$ v týchto smeroch:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{k^2 + 1}.$$

Vidíme, že tento výraz síce existuje pre každé k ale nie je konštantný (závisí od k). Takže neexistuje limita zadanej funkcie v bode $(0,0)$ a teda zadaná funkcia v tomto bode nie je spojitá. Graf tejto funkcie v okolí bodu $(0,0)$ je znázornený na obrázku 5.13.

Dokázať, že funkcia dvoch premenných je spojitá je logicky náročnejšie, ovšem v rade jasných prípadov je to zrejme.



Obrázok 5.13:

5.16 Preverte spojitosť funkcie

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

v jej definičnom obore.

Riešenie: definičným oborom uvedenej funkcie je zrejme celá rovina. Nech teda (\hat{x}, \hat{y}) je bod roviny. Uvažujme postupnosť $\{x_n, y_n\}$ bodov roviny, ktorá konverguje k (\hat{x}, \hat{y}) . To znamená, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x} \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \hat{y}.$$

Využívajúc známe vlastnosti limity súčtu a súčinu máme okamžite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - y_n^2) = \hat{x}^2 - \hat{y}^2 = f(\hat{x}, \hat{y}).$$

Takže sme ukázali, že f je spojitá vo svojom definičnom obore. Graf tejto funkcie je znázornený na obrázku 5.14.

5.17 Preskúmame existenciu limity funkcie

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

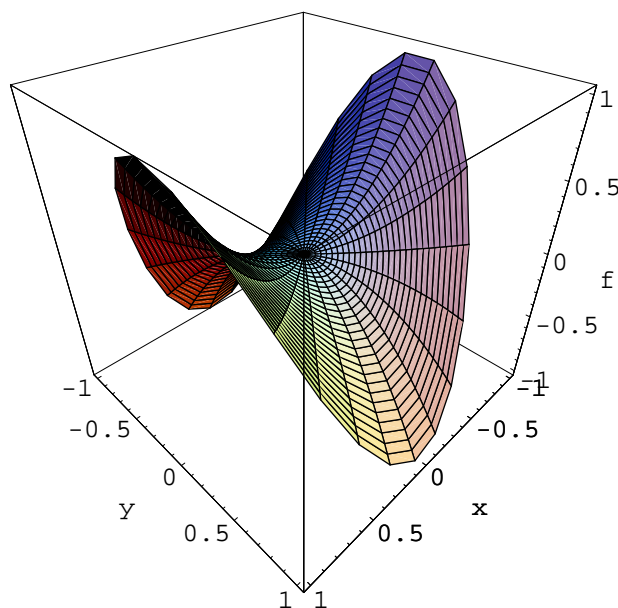
v bode $(0, 0)$.

Riešenie: uvažovaná funkcie je definovaná všade okrem bodu $(0, 0)$ preto má zmysel pýtať sa na limitu v tomto bode. Zvolme nasledové smery v rovine vychádzajúce z bodu $(0, 0)$:

$$y = kx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Potom limity v týchto smeroch sú rovné:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk^2x^2}{x^2 + k^4x^4} = k^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + k^4x^4} = k^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + k^4x^2} = 0.$$



Obrázok 5.14:

Vidíme teda, že limita uvažovanej funkcie v každom zo smerov $y = kx$ je nula. Grafy rezov funkcie f rovinami $y = kx$ sú znázornené na grafoch 5.15.

Tento výsledok však neznamená, že limita funkcie f v bode $(0, 0)$ je nula. Síce sme preskúmali všetky možnosti ako sa blížiť k $(0, 0)$ po priamke - ale to nie sú všetky spôsoby. Zoberme postupnosti bodov roviny, ktoré ležia na parabole $y = \sqrt{qx}$, $q > 0$, vtedy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \sqrt{qx}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xqx}{x^2 + q^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{q}{1 + q^2} = \frac{q}{1 + q^2}.$$

Tento výraz nie je konštantou, preto limita funkcie f v bode $(0, 0)$ neexistuje. Graf funkcie f v okolí bodu $(0, 0)$ je znázornený na obrázku 5.16.

5.5 Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

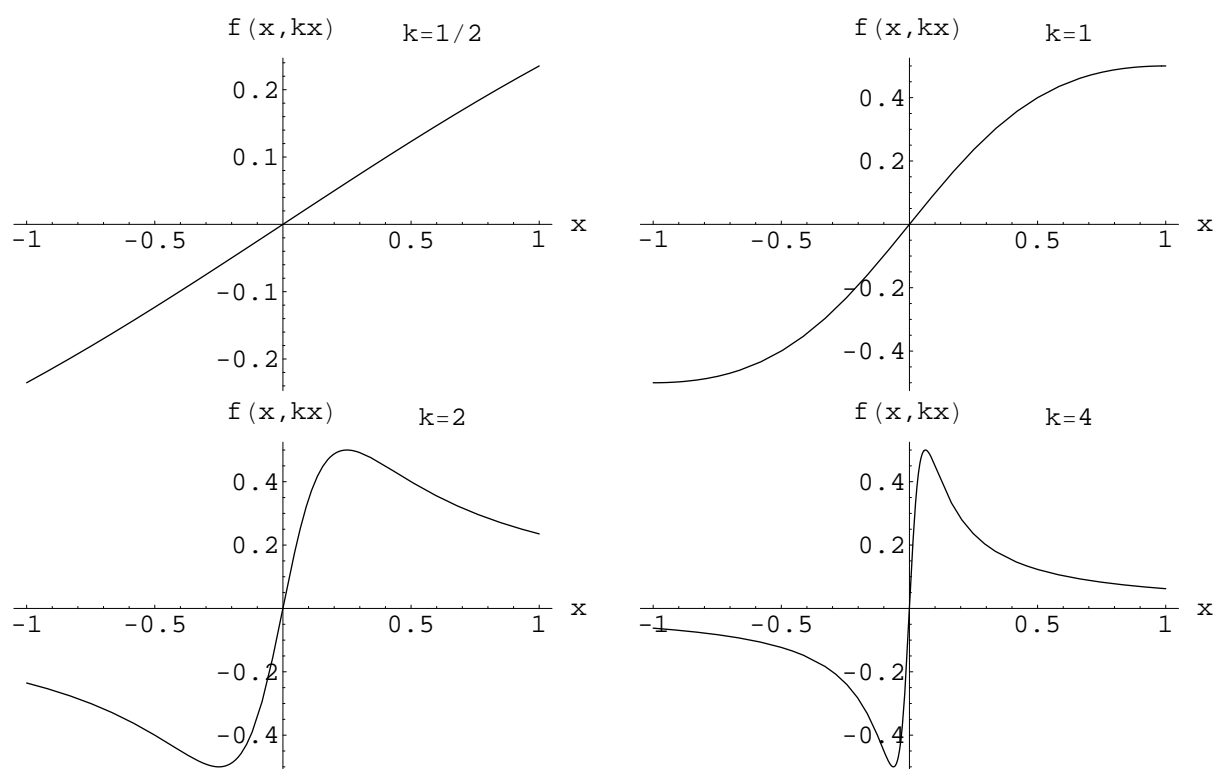
- Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu (x_0, y_0) . Ak existujú príslušné limity, voláme ich parciálne derivácie funkcie f v bode (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0)}{\delta}$$

- (Niektorá) parciálna derivácia (niektorej) prvej parciálnej derivácie funkcie f sa volá druhá parciálna derivácia funkcie f . Sú štyri možnosti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}$$



Obrázok 5.15:

- ak funkcie f''_{xy} a f''_{yx} sú spojité, potom sa rovnajú - t.j. platí zámennosť druhých parciálnych derivácií:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

- analogicky sa zavádzajú vyššie parciálne derivácie

5.18 Vypočítajte (z definície) prvé parciálne derivácie funkcie:

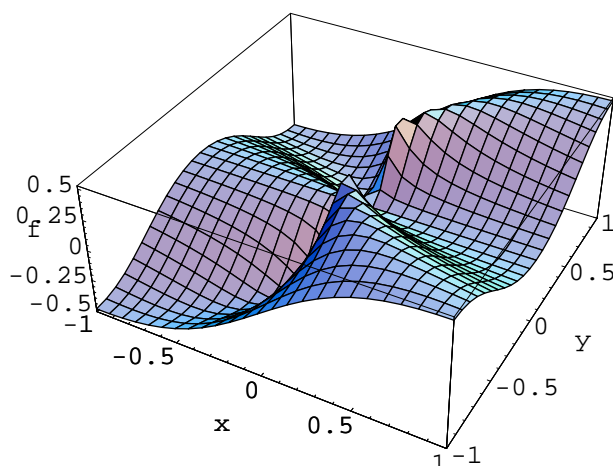
$$f(x, y) = x^2 - xy - y^3.$$

Riešenie: zadaná funkcia je definovaná všade, skúsime jej parciálne derivácie vypočítať tiež všade:

$$\begin{aligned} f'_x &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta, y) - f(x, y)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(x + \delta)^2 - (x + \delta)y - y^3 - [x^2 - xy - y^3]}{\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\delta + \delta^2 - xy - \delta y - y^3 - x^2 + xy + y^3}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2x\delta + \delta^2 - \delta y}{\delta} \lim_{\delta \rightarrow 0} (2x - y + \delta) = 2x - y \\ f'_y &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta) - f(x, y)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x^2 - x(y + \delta) - (y + \delta)^3 - [x^2 - xy - y^3]}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x^2 - xy - x\delta - y^3 - 3y^2\delta - 3y\delta^2 - \delta^3 - x^2 + xy + y^3}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-x\delta - 3y^2\delta - 3y\delta^2 - \delta^3}{\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-x - 3y^2 - 3y\delta - \delta^2) = -x - 3y^2. \end{aligned}$$

5.19 Vypočítajte (z definície) prvé parciálne derivácie funkcie:

$$f(x, y) = xe^{xy}.$$



Obrázok 5.16:

Riešenie: počas riešenia využijeme limitu:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Zadaná funkcia je definovaná všade preto skúsime aj jej parciálne derivácie vypočítať všade. Počítajme:

$$\begin{aligned} f'_x &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta, y) - f(x, y)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(x + \delta)e^{(x+\delta)y} - xe^{xy}}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{xe^{xy}e^{\delta y} + \delta e^{xy}e^{\delta y} - xe^{xy}}{\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(e^{xy}e^{\delta y} + xe^{xy} \frac{e^{\delta y} - 1}{\delta} \right) = e^{xy} \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\delta y} + xe^{xy} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{\delta y} - 1}{\delta} = e^{xy} + xe^{xy} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{\delta y} - 1}{\delta} = \\ &= \left| y \neq 0 : \delta y = u, \delta = \frac{u}{y} \right| = e^{xy} + xe^{xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{\frac{u}{y}} = e^{xy} + xye^{xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = e^{xy} + xye^{xy}. \end{aligned}$$

Zostáva urobiť výpočet ešte pre $y = 0$:

$$f'_x = e^0 + xe^0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^0 - 1}{\delta} = 1.$$

Takže pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f'_x = e^{xy} + xye^{xy}.$$

Ďalej vypočítame parciálnu deriváciu podľa premennej y :

$$\begin{aligned} f'_y &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta) - f(x, y)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{xe^{x(y+\delta)} - xe^{xy}}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{xe^{xy}e^{x\delta} - xe^{xy}}{\delta} = \\ &= xe^{xy} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{x\delta} - 1}{\delta} = \left| x \neq 0 : x\delta = u, \delta = \frac{u}{x} \right| = xe^{xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{\frac{u}{x}} = x^2 e^{xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = x^2 e^{xy}. \end{aligned}$$

Pre $x = 0$ dostávame:

$$f'_y = 0$$

takže pre ľubovoľné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$f'_y = x^2 e^{xy}.$$

Praktický výpočet parciálnych derivácií prebieha rovnako ako výpočet derivácie funkcie jednej premennej nakoľko pri počítaní parciálnej derivácie podľa jednej premennej považujeme druhú premennú za konštantu - t.j. pracujeme s funkciou jednej premennej.

5.20 Vypočítajte všetky prvé a druhé parciálne derivácie funkcie

$$f(x, y) = x \sin(xy).$$

Riešenie:

$$f'_x = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

$$f'_y = x^2 \cos(xy)$$

$$f''_{xx} = y \cos(xy) + y \cos(xy) - x^2 \sin(xy) = 2y \cos(xy) - x^2 \sin(xy)$$

$$f''_{yy} = -x^3 \sin(xy)$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

5.21 Vypočítajte všetky prvé a druhé parciálne derivácie zadaných funkcií

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x, y) = 1 + x - y$ | b) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ | c) $f(x, y) = \cos(xy)$ | d) $f(x, y) = x^3 + y^3$ |
| e) $f(x, y) = (x + y)^2$ | f) $f(x, y) = \arctan(xy)$ | g) $f(x, y) = x^2 y + y^2 - x^3 y^4$ | h) $f(x, y) = x + y^{1/3}$ |
| i) $f(x, y) = xy \sin(x)$ | j) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^4}$ | k) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{y}$ | l) $f(x, y) = xy^3 - x^3 y$ |
| m) $f(x, y) = \sqrt[5]{xy}$ | n) $f(x, y) = \frac{1 + xy}{x^2 - y}$ | o) $f(x, y) = \frac{x^3}{1 + y^2}$ | p) $f(x, y) = \frac{1}{x^3 + y}$ |

5.6 Vyšetřovanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných pomocou parciálnych derivácií

- Budeme predpokladať, že funkcia dvoch premenných $f(x, y)$ má vo svojom definičnom obore spojité druhé parciálne derivácie.
- Ak funkcia f má lokálny extrém v bode A , tak potom

$$f'_x(A) = 0, f'_y(A) = 0.$$

- Body, v ktorých platia rovnosti $f'_x = 0, f'_y = 0$ sa volajú stacionárne body funkcie f .

Postup pri hľadaní extrémov funkcií dvoch premenných:

- Vypočítame f'_x a f'_y
- Nájdeme stacionárne body, t.j. vyriešime sústavu rovníc:

$$f'_x = 0, f'_y = 0.$$

- Ak existujú nejaké stacionárne body tak vypočítame druhé parciálne derivácie, t.j. f''_{xx} , f''_{yy} a f''_{xy} .
- Ak A je stacionárny bod, tak zostavíme maticu:

$$M(A) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{xy}(A) & f''_{yy}(A) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{pmatrix}.$$

Podľa vlasností matice $M(A)$ rozhodneme o lokálnom extrémе funkcie f v bode A nasledovne

- ak $a_{xx} > 0$ a $a_{xx}a_{yy} - a_{xy}^2 > 0$ (kladná definitnosť M) tak v bode A je lokálne minimum
- ak $a_{xx} < 0$ a $a_{xx}a_{yy} - a_{xy}^2 > 0$ (záporná definitnosť M) tak v bode A je lokálne maximum
- ak $a_{xx}a_{yy} - a_{xy}^2 < 0$ (indefinitnosť M) tak v bode A je sedlový bod
- inak nevieme na základe tejto schémy rozhodnúť, či je v bode A lokálny extrém.

5.22 Nájdite lokálne extrém y funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3.$$

Riešenie: zrejme je zadaná funkcia definovaná v celej rovine a ďalej má (všetky) parciálne derivácie. Preto zrátame:

$$f'_x = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x), \quad f'_y = 2y + 3y^2 = y(2 + 3y).$$

To znamená, že riešenia rovníc $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ sú 4 body:

$$A = (0, 0) \quad B = (0, -2/3) \quad C = (-2/3, 0) \quad D = (-2/3, -2/3).$$

Druhé parciálne derivácie sú:

$$f''_{xx} = 2 + 6x \quad f''_{yy} = 2 + 6y \quad f''_{xy} = 0,$$

takže matica

$$M = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6x & 0 \\ 0 & 2 + 6y \end{pmatrix}$$

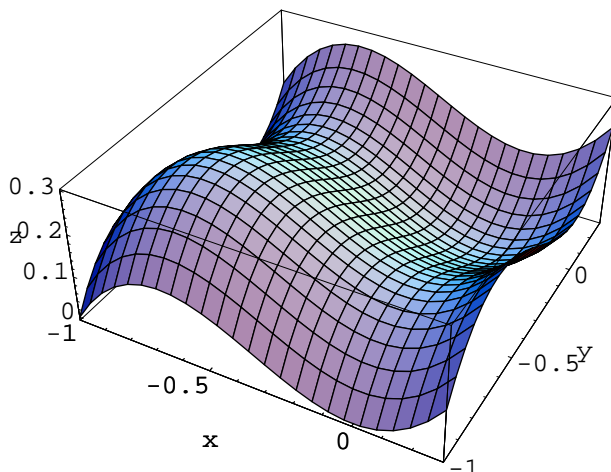
je v jednotlivých bodoch

$$M(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad M(C) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M(D) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

takže: v bode A je lokálne minimum, v bodoch B a C sú sedlové body a v bode D je lokálne maximum. Graf funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3$ je na obrázku 5.17.

5.23 Nájdite lokálne extrém y funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3.$$



Obrázok 5.17: Graf funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3$. Vidíme jasne lokálne minimum v bode $(0, 0)$ a lokálne maximum v bode $(-2/3, -2/3)$, taktiež vidno oba sedlové body.

Riešenie: zrejme je zadaná funkcia definovaná v celej rovine a ďalej má (všetky) parciálne derivácie. Preto zrátame:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Podmienka nulovosti parciálnych derivácií teda znamená:

$$2x + 3x^2 = 0, \quad 2y = 0 \Rightarrow y = 0, x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Takže z extrémů sú "podozrivé" dva body: $A = [0, 0]$, $B = [-2/3, 0]$. Vypočítame druhé parciálne derivácie:

$$f''_{xx} = 2 + 6x, f''_{yy} = 2, f''_{xy} = 0.$$

Takže matica

$$M = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je v bode A :

$$M(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

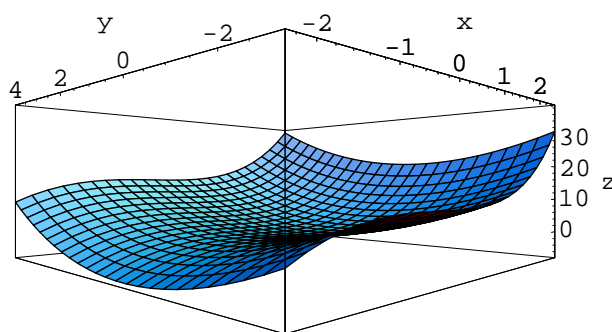
pozitívne definitná a preto v bode A funkcia f nadobúda lokálne minimum. Pozrieme sa na bod B :

$$M(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zrejme matica $M(B)$ je indefinitná, preto v bode B funkcia f nemá lokálny extrém. Graf funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ je na obrázku 5.18.

5.24 Nájdite lokálne extrémů funkcie 2 premenných:

$$f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2.$$



Obrázok 5.18: Graf funkcie $x^2 + y^2 + x^3$, pohľad na plochu z bodu $(-1, 1, 0)$.

Riešenie: zrejme je zadaná funkcia definovaná v celej rovine a ďalej má (všetky) parciálne derivácie. Preto zrátame:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 - 2y.$$

Stacionárne body teda spĺňajú podmienky:

$$2xy^2 - 2x = 0, \quad 2yx^2 - 2y = 0 \Rightarrow x(y^2 - 1) = 0, \quad y(x^2 - 1) = 0.$$

Takže stacionárne body sú: $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$, $C = [1, -1]$, $D = [-1, 1]$ a $E = [-1, -1]$. Zrátame druhé parciálne derivácie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Takže matica:

$$M = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 - 2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Maticu M vyhodnotíme v jednotlivých stacionárnych bodoch:

- v A :

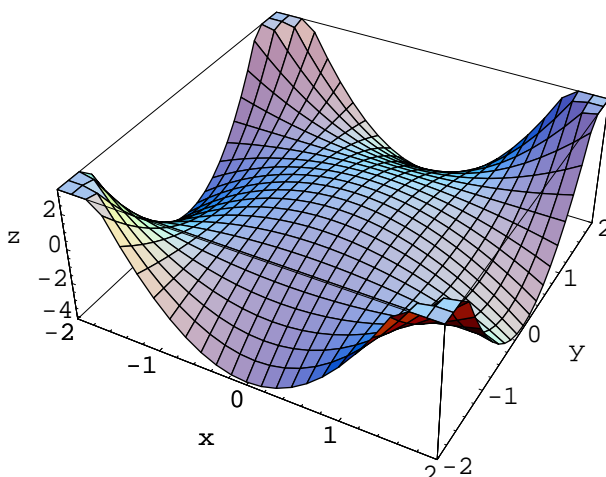
$$M(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

je M negatívne definitná preto je v A lokálne maximum

- v B, C, D, E :

$$M(B) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(C) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(D) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

nie je lokálny extrém na základe vyššie uvedenej schémy. Graf funkcie $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$ je na obrázku 5.19.



Obrázok 5.19:

5.25 Medzi všetkými hranolmi, ktorých povrch je S nájdite ten hranol, ktorého objem je maximálny.

Riešenie: uvažujme všeobecný hranol s dĺžkami strán $a, b, c > 0$. Povrch tohoto hranola je:

$$S = 2(ab + ac + bc),$$

a jeho objem:

$$V = abc.$$

Vyjadríme si jednu z dĺžok hrán pomocou ostatných dvoch a povrchu:

$$a = \frac{\frac{S}{2} - bc}{a + c}.$$

Takže objem je:

$$V = \frac{\frac{S}{2} - bc}{a + c} bc.$$

Toto je funkcia 2 premenných b, c definovaná v kvadrante $b, c > 0$. My máme nájsť jej maximum. Na hraniciach uvažovanej oblasti (definičného oboru) je $V = 0$ (lebo hranice sú $b = 0$ alebo $c = 0$). Takže maximum sa na hraniciach nedosahuje. Musíme ďalej preskúmať lokálne extrémny. Vypočítame prvé parciálne derivácie:

$$V'_b = \frac{c^2}{2(b+c)^2} [S - 2b^2 - 4bc], \quad V'_c = \frac{b^2}{2(b+c)^2} [S - 2c^2 - 4bc].$$

Podmienka na stacionárne body teda je:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{2(b+c)^2} [S - 2b^2 - 4bc] &= 0 \\ \frac{b^2}{2(b+c)^2} [S - 2c^2 - 4bc] &= 0, \end{aligned}$$

alebo po úprave:

$$S - 2b^2 - 4bc = 0$$

$$S - 2c^2 - 4bc = 0.$$

Odčítaním rovníc od seba máme:

$$-2b^2 + 2c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |b| = |c|.$$

Keď využijeme, že b a c sú kladné, tak potom

$$b = c.$$

Naviac vieme aj, že

$$b = c = \sqrt{\frac{S}{6}}.$$

Z rovnice pre povrch máme ďalej:

$$S = 2(ab + ab + b^2) = 4ab + \frac{1}{3}S \Rightarrow \frac{2}{3}S = 4ab \Rightarrow ab = \frac{1}{6}S = b^2 \Rightarrow a = b.$$

Takže sme ukázali, že extrém sa môže byť len v bode $a = b = c = \sqrt{S/6}$. Preveríme, že sa jedná o lokálne (a teda aj globálne, viď úvaha o hranici) maximum. Vypočítame druhé parciálne derivácie:

$$V''_{bb} = -\frac{c^2}{(b+c)^3}(2c^2 + S)$$

$$V''_{cc} = -\frac{b^2}{(b+c)^3}(2b^2 + S)$$

$$V''_{bc} = \frac{bc}{(b+c)^3}[S - 2(b^2 + 3bc + c^2)].$$

V stacionárnom bode: $b = c = \sqrt{S/6}$ resp. $b = c$ & $S = 6b^2$ je teda:

$$V''_{bb} = -b$$

$$V''_{cc} = -b$$

$$V''_{bc} = -\frac{1}{2}b.$$

Takže matica druhých derivácií v stacionárnom bode je

$$M = \begin{pmatrix} -b & -1/2b \\ -1/2b & -b \end{pmatrix}.$$

Keďže $b > 0$, vidíme, že M je záporne definitná v náš stacionárny bod je lokálne maximum. Teda konštatujeme, že hľadaný kváder je kocka so stranou $\sqrt{S/6}$.

5.26 Uvažujme nádobu tvaru kvádra so stranami x, y, z , ktorá nemá jednu stenu (ako akvárium). Nech je to jedna z podstáv v rovine xy ; teda povrch takého akvária je:

$$S = xy + 2(x + y)z.$$

Objem akvária je samozrejme

$$V = xyz.$$

Zistíme, ktoré akváriu, pri zadanom objeme V , má minimálny povrch!

Riešenie: podobne ako v príklade 5.25 - len troska rafinovanejšie a jednoduchšie: x a y vystupujú v úlohe zjavne rovnocenne preto vidíme, že v riešení proste musí byť

$$x = y,$$

preto máme minimalizovať funkciu:

$$S = x^2 + 4xz$$

za podmienky

$$V = x^2z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{V}{x^2}.$$

Takže máme vlastne len funkciu jednej premennej:

$$S = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

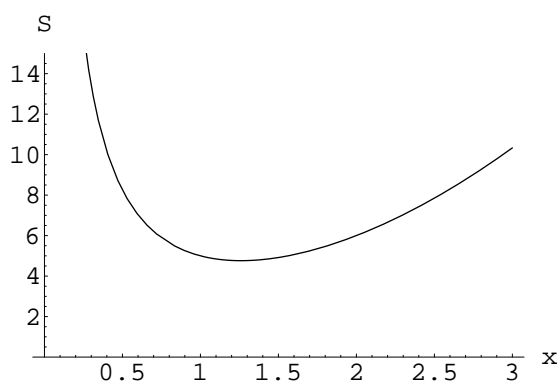
Nájdeme jej extrém:

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}.$$

Z priebehu funkcie S znázorneného na obrázku 5.20 vidíme, že v uvedenom bode je lokálne minimum plochy S a teda rozmery hľadaného akvária sú:

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \quad z = 2^{2/3} \sqrt[3]{V}.$$

Vidíme, že to nie je kocka!

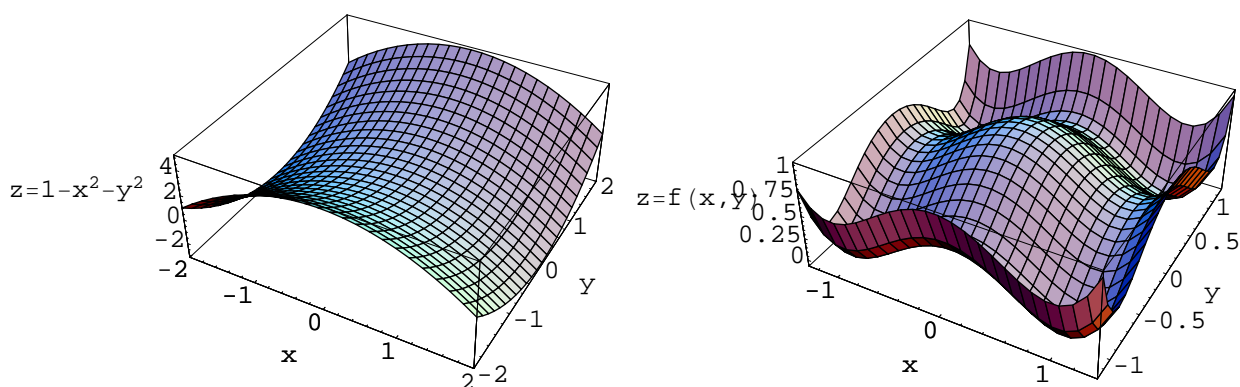


Obrázok 5.20:

5.27 Pomocou diferenciálneho počtu nájdite (ak existujú) lokálne extrémny a sedlové body nasledujúcich funkcií

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x, y) = 2 + x - y & b) f(x, y) = x^2 - y & c) f(x, y) = 3 - x^4 - y^6 \\
 d) f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} & e) f(x, y) = x + y + x^2 - y^2 & f) f(x, y) = 1 - x + 4y - y^2 \\
 g) f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y & h) f(x, y) = x^3 + y^3 + x & i) f(x, y) = x + x^5 + y^2 \\
 j) f(x, y) = x^4 + y^2 + x^5 + y^3 & k) f(x, y) = 1 + x^2y^2 + y^4 & l) f(x, y) = \arctan(x^2y^2)
 \end{array}$$

Na obrázku 5.21 máte príklad funkcie, ktorá má jeden sedlový bod a funkcie ktorá má 5 lokálnych extrémov a štyri sedlové body.



Obrázok 5.21: V pravo je graf funkcie $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + 1/2x^4 + 1/2y^6$

5.7 Dotyková rovina ku grafu funkcie 2 premenných

Ak predpokladáme, že funkcia $f = f(x, y)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $A = (x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$ a má v tomto okolí spojité parciálne derivácie f'_x a f'_y potom ku grafu tejto funkcie možno, v bode $(x_A, y_A, f(A))$, zostrojiť dotykovú rovinu, rovnica ktorej je

$$z_t = f'_x(A)(x - x_A) + f'_y(A)(y - y_A) + f(A).$$

5.28 Zostrojte dotykovú rovinu ku grafu funkcie $f(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2$ v bode $(1, 1, -2)$.
Riešenie: uvedená funkcia je zrejme definovaná všade v \mathbb{R}^2 spolu so všetkými parciálnymi deriváciami. Vypočítame

$$f'_x = -2x \qquad f'_y = -4y$$

takže

$$f'_x(1, 1) = -2 \qquad f'_y(1, 1) = -4$$

a teda hľadaná dotyková rovina je daná vzťahom

$$z_t = -2(x - 1) - 4(y - 1) - 2.$$

5.29 Uvažujme funkciu $f(x, y) = x^2 + y^2$ a bod $M = (1, 0, 0)$. Nájdime všetky body grafu funkcie f také, že ak nimi vedieme rovinu dotykovú ku grafu funkcie f , tak táto rovina prechádza bodom M .

Riešenie: Nech (x_0, y_0) je bod z \mathbb{R}^2 , potom rovina dotyková ku grafu f v bode $(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$ má rovnicu

$$z_t = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + x_0^2 + y_0^2.$$

My teraz chceme aby tejto rovine patrila bod $(1, 0, 0)$ to ale znamená, že

$$2x_0(1 - x_0) - 2y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1,$$

čo je ale rovnica kružnice (v rovine Oxy) so stredom v bode $(1, 0)$ a polomerom 1. Takže body grafu funkcie f ktorý sa vedie dotyková rovina tak, že prechádza aj bodom M sú práve všetky tie, ktorých (x, y) -súradnice ležia na uvedenej kružnici.

5.30 Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie f v jeho bode A :

- | | |
|--|---|
| a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $A = (0, 0, 0)$ | b) $f(x, y) = xy$, $A = (1, 2, 2)$ |
| c) $f(x, y) = -2x^4 + y^6$, $A = (2, 1, -35)$ | d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $A = (2, -2, -1)$ |
| e) $f(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$, $A = (2, 0, 2)$ | f) $f(x, y) = x^y$, $A = (1, 1, 1)$ |
| g) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$, $A = (1, 1, 0)$ | h) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $A = (0, 0, 0)$ |
| i) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $A = (0, 0, 0)$ | j) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $A = (0, 0, 1)$ |
| k) $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$, $A = (0, 0, 0)$ | l) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $A = (0, 0, 0)$ |
| m) $f(x, y) = \frac{y}{1 + x}$, $A = (0, 0, 0)$ | n) $f(x, y) = x \ln(y)$, $A = (1, 1, 0)$ |
| o) $f(x, y) = x \sin(y)$, $A = (0, 0, 0)$ | p) $f(x, y) = x \cos(y)$, $A = (0, 0, 0)$ |
| q) $f(x, y) = x(y - 1)$, $A = (1, 0, -1)$ | r) $f(x, y) = x^y y^x$, $A = (1, 1, 1)$ |