text k prednáške a úlohy k cvičeniam z vybraných kapitol z matematiky

mišo demetrian[1]

1 Funkcionálne rady, rovnomerná konvergencia

1.1 Číselné rady - opakovanie

✠ **definícia konvergencie číselného radu**: uvažujeme číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

hovoríme, že tento rad konverguje k svojmu súčtu S, ak ku každému kladnému ϵ nájdeme také celé kladné číslo N_ϵ, že pre každé $N > N_\epsilon$ je

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < \epsilon.$$

Inak hovoríme, že rad (1) nekonverguje (diverguje).

✓ konečný súčet

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

sa volá $N-$tý čiastočný súčet radu (1). Rad (1) konverguje k S práve vtedy keď platí

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

Táto rovnosť spája pojem konvergencie číselnej postupnosti a číselného radu.

✠ **nutná podmienka konvergencie radu**: ak rad (1) konverguje, tak potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

✠ **Cauchy-Bolzanova nutná a postačujúca podmienka konvergencie radu**: rad (1) konverguje práve vtedy, keď ku každému kladnému číslu ϵ sa nájde také celé kladné číslo N_ϵ, že pre všetky kladné celé čísla $p > N_\epsilon$ a pre všetky kladné celé čísla q platí:

$$\left| \sum_{n=p}^{p+q} a_n \right| < \epsilon.$$

Základné informácie: geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

✠ konverguje pre $|q| < 1$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

[1] demetrian@fmph.uniba.sk

✠ diverguje pre $|q| \geq 1$. Tieto vlastnosti geometrického radu sa ľahko overia nasledovným spôsobom. V prvom rade si uvedomíme, že pre $|q| \geq 1$ geometrický rad diverguje, lebo nepĺňa nutnú podmienku konvergencie. Zostavíme N-tý čiastočný súčet:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} + q^N.$$

Potom vynásobením poslednej rovnosti kvocientom q máme

$$qS_N = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N + q^{N+1}.$$

A odčítaním posledných dvoch rovností od seba dostávame

$$S_N(1-q) = 1 - q^{N+1} \Rightarrow S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

(Pripomeňme, že pracujeme už len s $|q| < 1$ preto rovnosť $q = 1$ nenastáva.) Využitím faktu, že pre $|q| < 1$ je $\lim_{a\to\infty} q^a = 0$ máme finálne súčet geometrického radu

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

✠ konverguje pre $\alpha > 1$

✠ diverguje pre $\alpha \leq 1$ (Divergencia tohoto radu pre $\alpha = 1$ bude ukázaná onedlho).

Základné kritériá konvergencie radov:

✠ **absolútna konvergencia**: ak konverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

tak konverguje aj rad (1).

✠ **porovnávacie kritérium**: nech rad (1) a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s nezápornými členmi, potom

✓ ak rad (1) konverguje a počínajúc niektorým indexom n platí

$$b_n \leq a_n,$$

tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

✓ ak rad (1) diverguje a počínajúc niektorým indexom n platí

$$b_n \geq a_n,$$

tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

✠ **porovnávacie kritérium v limitnom tvare**: nech rad (1) a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s nezápornými členmi, potom

- ✓ ak rad (1) konverguje a existuje vlastná limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n},$$

  tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

- ✓ ak rad (1) diverguje a existuje vlastná od nuly rôzna alebo nevlastná limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n},$$

  tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

✠ **podielové (d' Alembertovo) kritérium**: ak $a_n > 0$ a ak existuje číslo

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

tak potom

- ✓ ak $k < 1$ tak rad (1) konverguje
- ✓ ak $k > 1$ tak rad (1) diverguje .

✠ **odmocninové (Cauchyho) kritérium**: ak $a_n \geq 0$ a ak existuje číslo

$$k = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n},$$

tak potom

- ✓ ak $k < 1$ tak rad (1) konverguje
- ✓ ak $k > 1$ tak rad (1) diverguje

✠ **integrálne kritérium**: nech rad (1) je rad s nezápornými členmi, ak existuje spojitá nerastúca funkcia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ taká, že

$$f(n) = a_n \ (\forall\ n \in \mathbb{N}) \quad \text{a} \quad \lim_{A\to\infty}\left[\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right] < \infty,$$

tak rad (1) konverguje; z druhej strany ak za tých istých predpokladov je

$$\lim_{A\to\infty}\left[\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right] = \infty,$$

tak rad (1) diverguje.

✠ **Leibnitzovo kritérium**: uvažujeme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n, \tag{2}$$

kde $c_n \geq 0$ a (počínajúc niektorým indexom n) je $c_{n+1} \leq c_n$ a $c_n \to 0$ pri $n \to \infty$, potom rad (2) konverguje.

1.1 Z definície dokážte, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{3}$$

konverguje.

Riešenie: je založené na nasledovnej "príjemnej" vlastnosti členov zadaného radu: pre každé prirodzené číslo k je

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

čo nám umožnuje v uzavretej forme zrátať $N-$tý čiastočný súčet zadaného radu nasledovne:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}, \end{aligned}$$

takže máme súčet radu:

$$S = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

1.2 Dokážte, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{4}$$

konverguje.

Riešenie: použijeme predchádzajúci výsledok a porovnávacie kritérium v limitnom tvare, porovnanie s radom (3) dáva:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1,$$

takže rad (4) konverguje rovnako ako rad (3).

1.3 Dokážte z definície, že harmonický rad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{5}$$

diverguje.

Riešenie: myšlienka je, že podľa obrázku 1 a geometrickej interpretácie určitého integrálu ako obsahu plochy medzi osou x a krivkou máme odhad na $N-$tý čiastočný súčet radu (5):

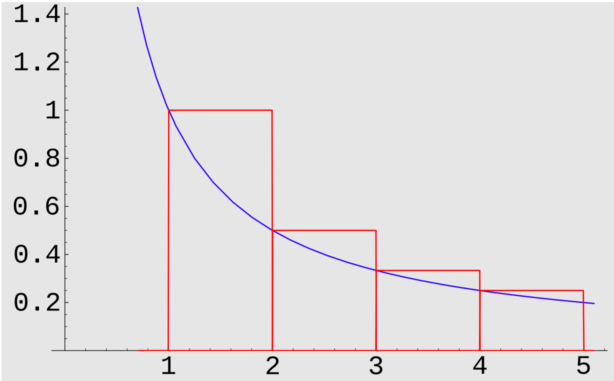
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(N+1).$$

Preto

$$\lim_{N\to\infty} S_N \geq \lim_{N\to\infty} \ln(N+1) = +\infty.$$

1.4 Dokážte, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{6}$$



Obr. 1:

diverguje.
Riešenie: použijeme znalosť, že harmonický rad (5) diverguje a porovnávacie kritérium v limitnom tvare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

takže rad (6) diverguje (a rýchlejšie ako harmonický rad).

1.5 Ukážte, že rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)} \tag{7}$$

konverguje.
Riešenie: ukazuje sa byť príhodné použiť integrálne kritérium, t.j. máme ukázať, že integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} \mathrm{d}x$$

je konečný. Priamim výpočtom máme:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln(x) = y \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right| = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_{\ln(2)}^{\infty} = \frac{1}{\ln(2)} < \infty.$$

1.6 Využijúc predchádzajíci výsledok ukážte, že konverguje rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n \ln^2(n)}\right). \tag{8}$$

Riešenie: návod napovedá[2], že bude výhodné si spomenúť, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(overiť napríklad pomocou l'Hospitalovho pravidla, znalci aj inak ...). Porovnáme teda rady (7) a (8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n \ln^2(n)}\right)}{\frac{1}{n \ln^2(n)}} = \left| x = \frac{1}{n \ln^2(x)} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

takže podľa porovnávacieho kritéria v limitnom tvare rad (8) konverguje rovnako ako rad (7).

[2] aspoň niekomu :-)

1.7 Pomocou d'Alembertovho kritéria rozhodnite konvergenciu radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}. \tag{9}$$

Riešenie: priamim použítím d'Alembertovho kritéria máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\ n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1,$$

t.j. rad (9) je konvergentný.

1.8 Pomocou Cauchyho kritéria rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}. \tag{10}$$

Riešenie: priamim použitím Cauchyho kritéria máme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{5^n \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right)}{4^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)}\right]^{1/n} = \frac{5}{4} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right)}{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)}\right]^{1/n} = \frac{5}{4} > 1,$$

t.j. rad (10) je divergentný.

1.9 Vypočítajte s presnosťou 10^{-3} číslo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2^n}.$$

Riešenie: v prvom rade si treba ujasniť, že zadaný rad konverguje. To plynie z toho, že (geometrický) rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

konverguje a podľa porovnávcieho kritéria:

$$\frac{1}{n^2 + 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

aj zadaný rad konverguje. Myšlienka výpočtu čísla S je takáto:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2 + 2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2^n},$$

kde N je nejaké celé číslo, no a mi prakticky vezmeme

$$S \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2 + 2^n}.$$

Chyba, ktorej sa pri tomto dopúšťame, je odhadnuteľná nasledovne:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}} 2 = \frac{1}{2^N}.$$

No a naša požiadavka je, aby

$$R_N \leq 10^{-3} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2^N} < 10^{-3}.$$

Najmenším celočíselným N, ktoré vyhovuje tejto nerovnosti je $N = 10$ (pravda, $2^{10} = 1024$), takže s požadovanou presnosťou máme

$$S \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n^2 + 2^n} \approx 1.587$$

1.10 Porovnaním s radom typu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ s vhodným α vyšetrite konvergenciu radov

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5+n^3}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^{1/3}}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \arctan(n)} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \arctan(n)}$$

1.11 Pomocou d' Alembertovho alebo Cauchyho kritéria rozhodnite, či sú konvergentné nasledovné rady

$$a)\ \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{1+3^n}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - n^4}{2^n} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\left(\frac{1}{n}\right) \qquad i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-3^n}{2^n - 4^n}$$

$$j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \qquad k)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n} \qquad l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2^n}$$

1.12 Uveďte príklad radu, ktorý

- konverguje podľa Leibnitzovho kritéria a nekonverguje absolútne

- konverguje podľa Leibnitzovho kritéria a konverguje aj absolútne.

1.13 Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je usporiadaná postupnosť všetkých prvočísel. Ukážte, že konvergujú rady

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p_n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2}.$$

Poznamenajme, že je známe, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

diverguje.

1.14 Nájdite číselnú hodnotu súčtu radu $b)$ z úlohy 1.11 a radu $a)$ z úlohy 1.13 s absolútnou presnosťou 10^{-3}.

1.2 Obor konvergencie funkcionálneho radu (bodová konvergencia), elementárne súčty niektorých funkcionálnych radov

✠ **definícia funkcionálneho radu** - funkcionálnym radom nazývame rad, ktorého členy sú funkcie:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{11}$$

funkciu na ľavej strane nazývame *súčtom radu*;

✠ **obor konvergencie** - predpokladáme prirodzene, že funkcie f_n majú neprázdny spoločný definičný obor. množina tých x v ktorých rad (11) konverguje sa volá *obor konvergencie* uvedeného radu. Tento obor konvergencie je zrejme stotožniteľný s *definičným oborom* funkcie f - súčtu radu.

✠ **bodová konvergencia** - z definície rad (11) konverguje v každom bode svojho oboru konvergencie - hovoríme, že rad (11) *konverguje bodovo* vo svojom obore konvergencie.

1.15 Nájdite obor konvergencie a nakreslite graf funkcie zadanej funkcionálnym radom

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x+x^2}\right)^n.$$

Riešenie: zadaný rad je geometrický rad s kvocientom

$$q=\frac{x}{1+x+x^2}.$$

Geometrický rad konverguje práve vtedy keď $-1<q<1$, takže hľadáme také x pre ktoré platí

$$-1<\frac{x}{1+x+x^2}<1.$$

Takže

$$\frac{x}{1+x+x^2}<1 \Leftrightarrow 0<1+x^2,$$

čo platí pre každé $x\in\mathbb{R}$. Súčastne ale musí byť

$$-1<\frac{x}{1+x+x^2} \Leftrightarrow -1-x^2-2x<0 \Leftrightarrow -(1+x)^2<0,$$

čo zase platí pre každé $x\in\mathbb{R}$. Takže obor konvergencie zadaného radu je celá reálna os. Geometrický rad ide zosumovať

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q} \Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x+x^2}\right)^n=\frac{x}{1+x^2}.$$

Graf funkcie f je na obrázku 2.

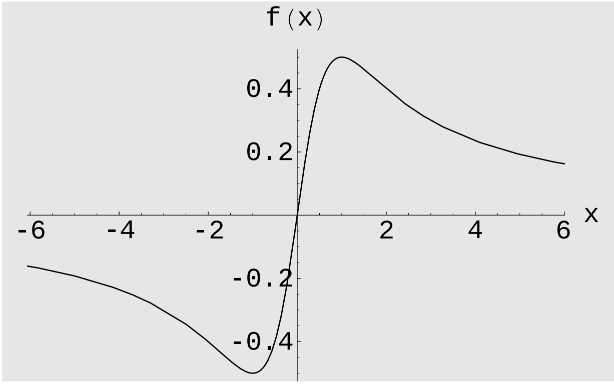
1.16 Nájdite obor konvergencie radu

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

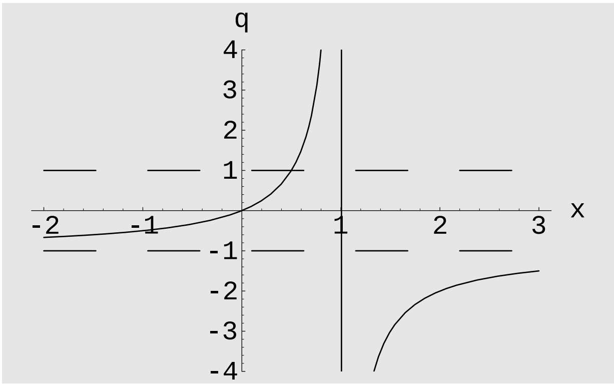
a vykreslite graf funkcie f.

Riešenie: jedná sa o geometrický rad s kvocientom:

$$q=\frac{x}{1-x}.$$



Obr. 2:



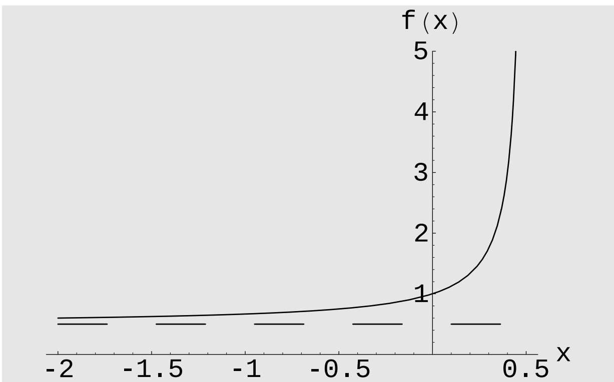
Obr. 3:

Nerovnosť $|q| < 1$ vyriešime ľahko graficky pomcou obrázku 3.

Oborom konvergencie uvedeného radu je teda interval: $(-\infty, 1/2)$. Je to aj definičný obor funkcie f, ktorú môžeme vyjadriť v tvare:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x}.$$

Graf funkcie f je na obrázku 4.



Obr. 4:

1.17 Nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}. \tag{12}$$

Riešenie: Rad (12) pripomína trochu geometrický rad, ale nie je to geometrický rad, kvôli menovateľu. Je zrejmé, že body $x = \pm 1$ nepatria do oboru konvergencie (členy radu nie sú definované). Preskúmame najprv kde konverguje zadaný rad absolútne. Začneme pomocou Cauchyho kritéria. Takže pre $x \neq \pm 1$ máme

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{|1-x^n|}}.$$

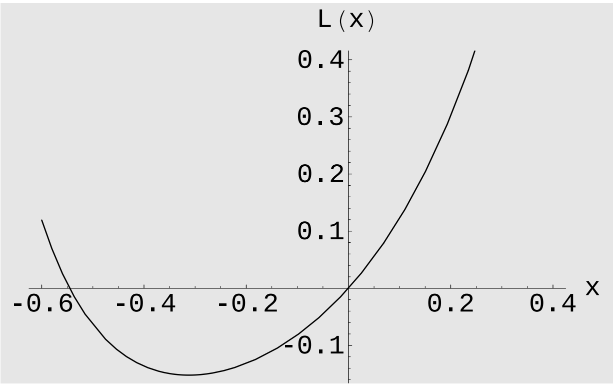
Pre $x = 0$ je zrejmé, že $k(0) = 0$, t.j. rad (12) konverguje v $x = 0$. Pre $x \neq 0$ je

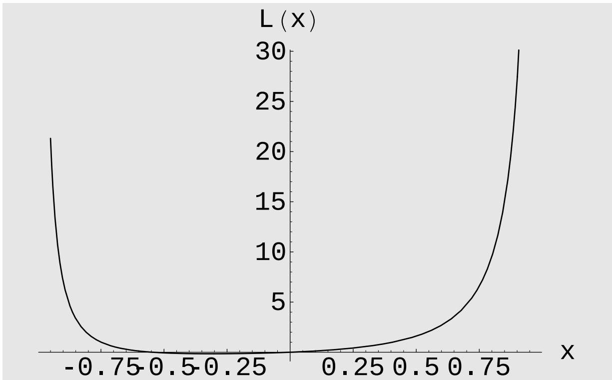
$$k(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|x^{-n}-1|}} = \begin{cases} |x| & \text{pre} \quad |x| < 1, \\ 1 & \text{pre} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Vidíme teda, že pri $|x| < 1$ rad (12) konverguje a to absolútne. Naviac vidíme, že pre $|x| > 1$ Cauchyho kritérium nehovorí nič (lebo k vyšlo 1). Ale pre $|x| > 1$ je predsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = -1 \neq 0,$$

takže nie je splnená nutnápodmienka konvergencie radu. Uzatvárame: obor konvergencie radu (12)[3] je otvorený interval $x \in (-1, 1)$. Na obrázku 5 je graf funkcie $L(x)$ danej radom (12).





Obr. 5: Graf funkcie (12), v ľavo a v pravo sú rôzne rozsahy x. Táto funkcia je neohraničená v pravom okolí bodu -1 a v ľavom okolí bodu $+1$.

1.18 Nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n(x)}{n^2}. \tag{13}$$

Riešenie: Vyskúšame absolútnu konvergenciu zadaného radu, použijeme Cauchyho kritérium, počítajme

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n |\sin^n(x)|}{n^2}}.$$

Nakoľko platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\ln(n)} = e^0 = 1,$$

tak máme

$$k(x) = 2|\sin(x)|.$$

Takže vidíme, že

[3] tento rad sa v literatúre nazýva *Lambertov rad.*

- pre $x \in (-\pi/6 + l\pi, \pi/6 + l\pi)$ ($l \in \mathbb{Z}$) je $k(x) < 1$ a rad (13) konverguje (dokonca absolútne)

- pre $x \in (\pi/6 + l\pi, 5\pi/6 + l\pi)$ ($l \in \mathbb{Z}$) je $k(x) > 1$ a rad (13) diverguje .

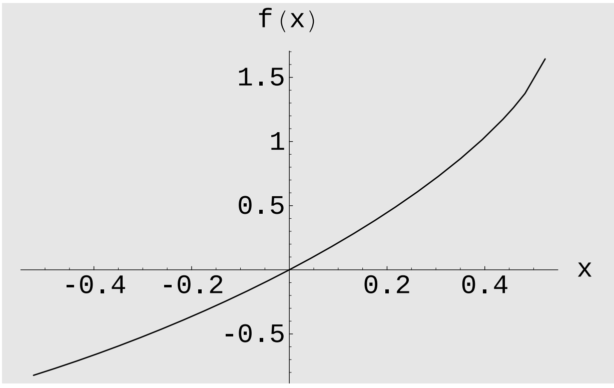
Zostáva preveriť body, v ktorých $k(x) = 1$, t.j. body $x_l = \pi/6 + l\pi$. Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n(x_l)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{nl}}{n^2}.$$

Ale posledne napísaný rad (či už pre párne alebo nepárne l) je konvergentný. Takže rad (13) konverguje aj v bodoch x_l. Preto oborom konvergencie radu (13) je množina

$$\{[-\pi/6 + l\pi, \pi/6 + l\pi],\ l \in \mathbb{Z}\}.$$

Graf funkcie f zadanej radom (13) (v intervale $[-\pi/6, \pi/6]$) je na obrázku 6.



Obr. 6: Graf funkcie zadanej radom (13) v intervale $[-\pi/6, \pi/6]$. Poznamenajme, že krajné hodnoty tejto funkcie sú: $\pi^2/6$ (v bode $\pi/6$) a $-\pi^2/12$ (v bode $-\pi/6$), tieto hodnoty nijako nevyplývajú z toho, čo sme urobili, ale na ich "zistenie"treba urobiť hodne viac.

1.19 Nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \tag{14}$$

a nakreslite graf funkcie f, ktorá je sumou radu.

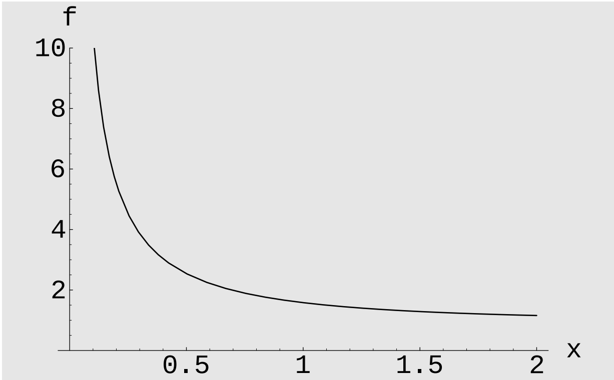
Riešenie: rad (14) je vlastne geometrivkým radom s kvocientom rovným e^{-x}, a ako vieme geometrický rad konverguje práve vtedy keď jeho kvocient je väčší ako -1 a menší ako 1. Nakoľko $e^{-x} > 0$ pre každé x, tak obmedzujúcou je len nerovnosť:

$$e^{-x} < 1 \ \Rightarrow\ x > 0.$$

Takže obor konvergencie radu (14) je množina $(0, \infty)$. Máme aj explicitnú formulu pre súčet nášho radu

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1},\ x \in (0, \infty).$$

Graf sumy f radu (14) je na obrázku 7.



Obr. 7: Graf sumy radu (14).

1.20 Nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{1 + e^{2nx}}.$$

Riešenie: zjavne nastávajú tri prípady:

- $x = 0$ - vtedy sa jedná o rad
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+1},$$
ktorý je zjavne divergentný.

- $x > 0$ - teraz možno použiť Cauchyho kritérium:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x}}{e^{2x}\sqrt[n]{1+e^{-2x}}} = e^{-x} < 1$$
takže rad konverguje.

- $x < 0$ - znova použijeme úspešne Cauchyho kritérium:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}} = e^{x} < 1$$
takže rad opäť konverguje.

Záver: rad konverguje na množine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - čo je definičný obor funkcie f, zobrazenej na obrázku 8. Všimnime si, že funkcia f je párna:

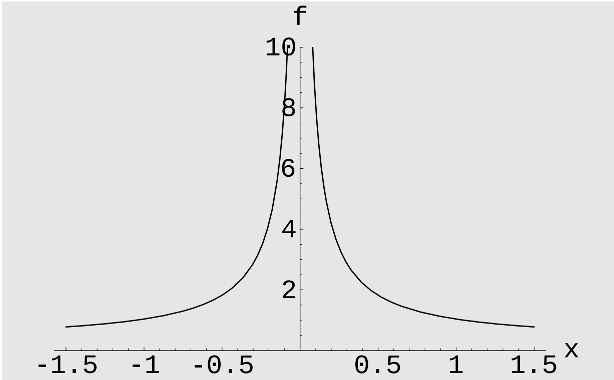
$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-2nx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{e^{-2nx}(1+e^{2nx})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}} = f(x).$$

1.21 Zakreslite graf funkcie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n.$$

Riešenie: zistíme najpr definičný obor funkcie - teda obor konvergencie radu. Je to geometrický rad, ktorý konverguje len vtedy keď

$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1.$$

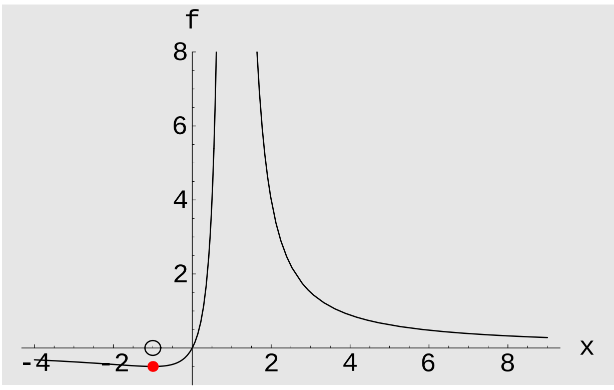


Obr. 8:

Riešením uvedenej nerovnosti sú všetky reálne čísla okrem ± 1, teda: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Potom už máme priamo, že v $D(f)$ je:

$$f(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1 - \frac{2x}{1+x^2}} = \frac{2x}{(x-1)^2}.$$

Graf funkcie f je na obrázku 9.



Obr. 9:

1.22 Nájdite obory konvergencie funkcionálnych radov a ich súčty, nakreslite grafy funkcií zadaných radmi:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4x}{1+x^2}\right)^n .$$

1.23 Nájdite obory konvergencie funkcionálnych radov

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

1.24 (Einsteinov model tepelnej kapacity kryštálu) Energie stacionárnych stavov kvantovomechanického lineárneho harmonického oscilátoru v jednom rozmere, ktorý má kruhovú frekvenciu ω sú dané formulou

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

kde $\hbar$ je Planckova konštanta. Ak je takýto oscilátor v kontakte s tepelným rezervoárom s inverznou teplotou β (β súvisí s obyčajnou teplotou T zadanou v Kelvinoch vzťahom: $\beta = 1/(kT)$, kde k je Boltzmanova konštanta), tak jeho termodynamické funkcie sú jednoznačne dané *štatistickou sumou* (*kánonickou partičnou funkciou*)

$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}. \tag{15}$$

Menovite tepelná kapacita C je daná formulou

$$C(\beta) = k\beta^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2} \ln[\mathcal{Z}(\beta)]. \tag{16}$$

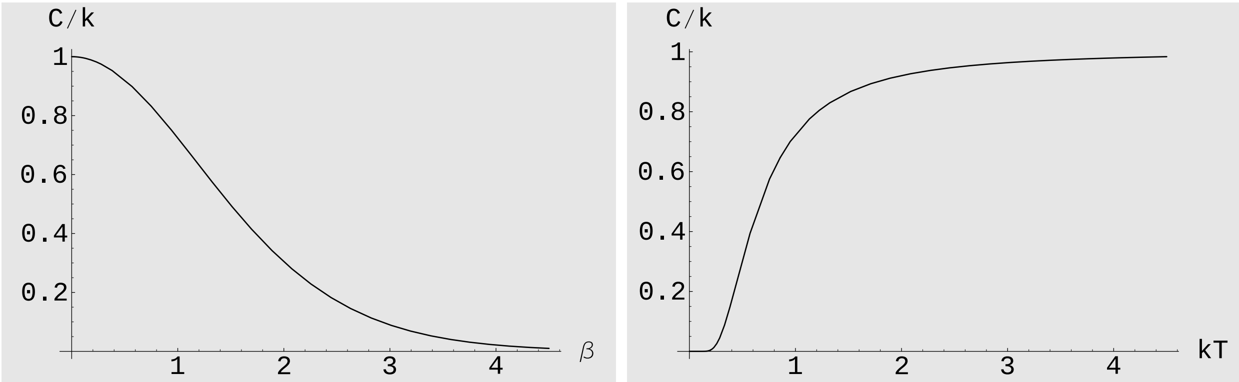
Úlohy:

- zistite pre ktoré hodnoty β konverguje suma (15)
  jedná sa o sumu:
  $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta},$$
  ktorá zrejme konverguje pre všetky hodnoty $\beta > 0$.

- zrátajte explixitne sumu (15)
  priamo úpravou na geometrický rad máme:
  $$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta} = e^{-\frac{\hbar\omega\beta}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega\beta n} = e^{-\frac{\hbar\omega\beta}{2}} \frac{1}{1-e^{-\hbar\omega\beta}} = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)},$$
  kde sme využili definíciu funkcie sínus hyperbolický (a použijeme aj kosínus hyperbolický):
  $$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- zrátajte explicitne tepelnú kapacitu (16) ako funkciu premennej β a načrtnite jej graf
  tepelná kapacita je daná vzťahom:
  $$C = k\beta^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2} \ln\left(\frac{2}{\sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}\right) = k\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}.$$
  ak zavedieme berzormernú premennú: $x = \frac{\hbar\omega\beta}{2}$, tak máme:
  $$C = kx^2 \frac{1}{\sinh^2(x)}.$$

- vypočítajte limity:
  $$a)\ \lim_{\beta\to 0^+} C(\beta) \qquad\qquad b)\ \lim_{\beta\to\infty} C(\beta)$$
  limita $\beta \to 0^+$ znamená limitu vysokej teploty a je ekvivalentná tomu, že $x \to 0^+$ a zase limita $\beta \to +\infty$ znamená limitu nízkej teploty a je ekvivalentná tomu, že $x \to +\infty$. Priamo vypočítame:
  $$\lim_{\beta\to 0^+} C(\beta) = \lim_{x\to 0^+} kx^2 \frac{1}{\sinh^2(x)} = k.$$
  Tento výsledok znamená ekvipartičnú teorému.
  $$\lim_{\beta\to +\infty} C(\beta) = \lim_{x\to +\infty} kx^2 \frac{1}{\sinh^2(x)} = 0.$$
  Tento výsledok znamená, že pri absolútnej nule teploty klesá do nuly tepelná kapacita. Graf závislosti bezrozmernej veličiny C/k od β ako aj od $1/\beta$ je na obrázku 10.



Obr. 10: Závislosť tepelnej kapacity meranej v jednotkách k v modeli z príkladu 1.24 od inverznej teploty β resp. od tepelnej energie kT.

1.3 Rovnomerná konvergencia funkcionálneho radu, Weierstrassove kritérium

✠ **definícia rovnomernej konvergencie funkcionálneho radu**: hovoríme, že funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{17}$$

konverguje rovnomerne k svojmu súčtu $f(x)$ na množine $A \subset \mathbb{R}$ práve vtedy keď platí

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N(\epsilon) > 0 \; \forall k > N(\epsilon) \& \forall x \in A : \; \left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| < \epsilon.$$

Tento výrok je ekvivalentný nasledovnému:

✠ **Cauchy-Bolzanova nutná a postačujúca podmienka rovnomernej konvergencie funkcionálneho radu**:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N(\epsilon) > 0 \; \forall p > N(\epsilon) \& \forall q \& \forall x \in A : \; \left| \sum_{n=p}^{p+q} f_n(x) \right| < \epsilon.$$

Na preverenie rovnomernej konvergencie radu môžeme použiť nasledovné:

✠ **Weierstrassove kritérium rovnomernej konvergencie funkcionálneho radu**: Nech rad (17) konverguje na množine A bodove, nech ďalej existuje postupnosť nezáporných čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\forall x \in A : \; |f_n(x)| \leq c_n$ a nech číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

konverguje. Potom rad (17) konverguje v A rovnomerne.

✓ Poznámka: Weierstrassove kritérium možno použiť len na rady, ktoré konvergujú absolútne.

1.25 Ukážte, že geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

(ktorý ako vieme konverguje (bodove) pre každé $|x| < 1$):

a) konverguje rovnomerne v každom intervale $[-a, a]$, kde $0 < a < 1$,

b) nekonverguje rovnomerne vo svojom obore konvergencie (t.j. v intervale $(-1,1)$).

Riešenie:

a) budeme postupovať tromi spôsobmi (za účelom osvojenia si príslušných pojmov); najprv preveríme priamo definíciu rovnomernej konvergencie, potom použijeme Cauchy-Bolzanove kritérium a napokon dokážeme rovnomernú konvergenciu aj pomocou Weierstrassovho kritéria (čo bude najľahšie).

a1) priame overenie rovnomernej konvergencie je v tomto prípade založené na tom, že poznáme explicitne sumu geometrického radu ako aj každý čiastočný súčet geometrického radu, menovite

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \equiv f(x), \quad \sum_{n=0}^{k} x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

Podľa definície rovnomernej konvergencie máme preveriť veľkosť výrazu

$$\left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{1-x} \right|.$$

Teraz príde to, že využijeme, že $x \in [-a,a]$ (t.j. že x sa "neťahá" až k 1). Predchádzajúci výraz odhadneme z hora, ak menovateľ urobíme najmenším a čitateľ najväčším:

$$\forall x \in [-a,a]: \ \left| \frac{x^{k+1}}{1-x} \right| \leq \frac{a^{k+1}}{1-a}.$$

(Poznamenajme, že "rovnomernosť"znamená to, že na pravej strane predchádzajúcej nerovnosti, ktorá platí pre každé uvažované x, už x nevystupuje). No a teraz nájdeme $N(\epsilon)$ vystupujúce v definícii:

$$\frac{a^{k+1}}{1-a}\epsilon \Leftrightarrow a^{k+1} < (1-a)\epsilon \Leftrightarrow k > -1 + \frac{\ln[(1-a)\epsilon]}{\ln(a)} \Rightarrow N(\epsilon) = \frac{\ln[(1-a)\epsilon]}{\ln(a)}.$$

Tým sme ukázali, čo bolo treba.

a2) teraz ukážeme rovnomernú konvergenciu pomocou Cauchy-Bolzanovej podmienky. Ide o to, odhadnúť výraz (kde zase bude kľúčovým, že $x \in [-a,a]$ s $0 < a < 1$):

$$\left| \sum_{n=p}^{p+q} x^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{p+q} x^n - \sum_{n=0}^{p} x^n \right| = |S_{p+q}(x) - S_p(x)| = \left| \frac{1-x^{p+q+1}}{1-x} - \frac{1-x^{p+1}}{1-x} \right| = \left| \frac{x^{p+1}(1-x^q)}{1-x} \right| \leq \frac{a^{p+1}}{1-a}.$$

No a teraz už ľahko nájdeme $N(\epsilon)$:

$$\frac{a^{p+1}}{1-a} < \epsilon \Rightarrow p > -1 + \frac{\ln[(1-a)\epsilon]}{\ln(a)} \Rightarrow N(\epsilon) = \frac{\ln[(1-a)\epsilon]}{\ln(a)}.$$

a3) s využitím Weierstrassovho kritéria dokážeme rovnomernú konvergenciu nášho radu ľahko; z toho, totiž priamo máme, že $|f_n(x)| = |x^n| \leq a^n$ a to, že $0 < a < 1$ znamená, že číselný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

konverguje.

b) to, že geometrický rad nekonverguje rovnomerne v celom obore konvergencie ukážeme priamo. Ku každému prirodzenému k nájdeme x (dostatočne blízko k 1 z ľava), že rozdiel k-teho čiastočného súčtu $S_k(x)$ od súčtu geometrického radu bude ľubovoľne veľký (to je dokonca viac ako potrebujeme!). Naozaj, rozdiel o ktorý nám ide je

$$\left|\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{k+1}}{1-x}\right|=\left|\frac{x^{k+1}}{1-x}\right|$$

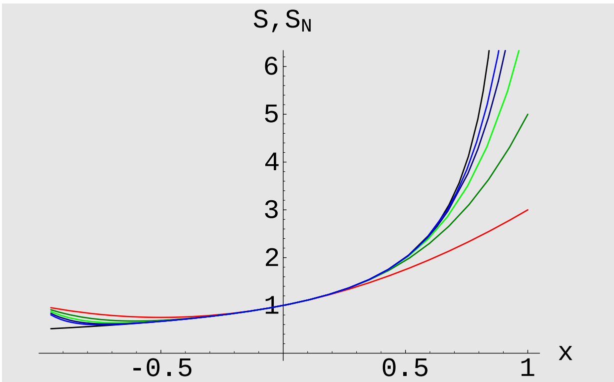
a

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{k+1}}{1-x}=+\infty\ (\forall k\in\mathbb{N}).$$

Ide tu o to, že funkcia $1/(1-x)$ je neohraničená v ľavom okolí bodu 1, ale k-ty čiastočný súčet je ohraničený, nakoľko:[4]

$$S_k(x)=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}S_k(x)=k+1.$$

Situácia je znázornená na obrázku 11.



Obr. 11: Súčet geometrického radu - v blízkosti 1 horná čierna čiara a čiastočné súčty tohoto radu (druhý, štvrtý, šiesty, ôsmi a desiaty). V ľavom okolí 1 sa každý čiastočný súčet líši od súčtu o nekonečnú hodnotu (funkcia $1/(x-1)$) je neohračená zhora v ľavom okolí 1 kým čiastočné súčty sú ohraničené.

1.26 Dokážte pomocou Weierstrassovho kritéria, že funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$$

konverguje rovnomerne v množine $x\in[0,\infty)$.

Riešenie: potrebujeme odhadnúť (nezáporné) funkcie

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^4x^2}$$

konštantami c_n, tak aby rad $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ konvergoval (ak sa to dá!). Najmenšie možné horné ohraničenie funkcií f_n dáva ich maximum. Nájdime ho:

$$f_n'(x)=\frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{n^2}.$$

[4] len pre "srandu" pripomeňme, že limitu z ľava v bode 1 z k-teho čiastočného súčtu geometrického radu možno zrátať aj pomocou známeho *l'Hospitalovho pravidla*, nasledovne:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^{k+1}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(k+1)x^k}{-1}=k+1.$$

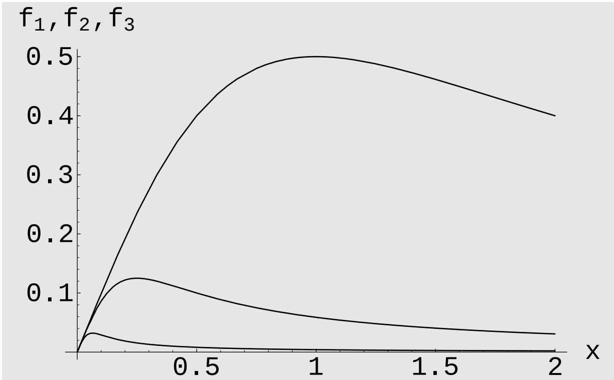
(to, že v $x = 1/n^2$ má funkcia f_n globálne maximum plynie z toho, že je nezáporná, $f_n(0) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. Pre názornosť, funkcie f_1, f_2, f_3 sú znázornené na obrázku 12.) Vezmeme teda

$$c_n = f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+1} = \frac{1}{2n^2}.$$

No ale číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

zrejme konverguje, t.j. náš rad konverguje rovnomerne v $[0, \infty)$.



Obr. 12:

1.27 Použitím Weierstrassovho kritéria ukážte, že rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{18}$$

konverguje rovnomerne v každom intervale $[-a, a]$, kde $a > 0$. Ďalej prediskutujte rovnomernú konvergenciu tohoto radu v $\mathbb{R}$.

Pozn.: je užitočné si uvedomiť resp. spomenúť alebo aj uveriť, že platí rovnosť

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{19}$$

Riešenie: najprv nájdeme obor konvergencie tohoto radu, s využitím d' Alembertovho kritéria (t.j. ukážeme absolútnu konvergeciu) máme, že pre každé reálne x je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1,$$

t.j. rad (18) konverguje (absolútne) v $\mathbb{R}$. Uvažujme teraz $x \in [-a, a]$, $a > 0$. Potom máme odhad na členy radu (18):

$$\left| \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \le \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a ďalej číselný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

konverguje - zase podľa d' Alembertovho kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

Preto podľa Weierstrassovho kritéria rad (18) konverguje rovnomerne v intervale $[-a, a]$, kde a je ľubovoľné kladné číslo.
Teraz si zodpovedajme - asi prirodzenú - otázku: konverguje rad (18) rovnomerne v $\mathbb{R}$? Pri odpovedaní si na túto otázku budeme používať istý podfuk - a to že sa budeme tváriť, že nám je známe, že platí (19), ale to fakticky myšlienku neovplyvňuje[5]. Vezmime teda $N-$tý čiastočný súčet radu (18):

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - + \cdots + \frac{(-1)^N}{(2N+1)!} x^{2N+1}.$$

Potrebujeme preskúmať, či $S_N(x)$ aproximuje funkciu $\sin(x)$ s dostatočnou presnosťou ak len vezmeme dostatočne veľké N - a to bez ohľadu na x. Čiastočný súčet $S_N(x)$ je polynóm (nenulový) v premennej x. Ale to znamená, že musí platiť

$$\lim_{x\to+\infty} S_N(x) = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} S_N(x) = \pm\infty$$

no ale funkcia $\sin(x)$ nadobúda hodnoty len medzi -1 a 1 - to ale znamená, že rozdiel

$$|S_N(x) - \sin(x)|$$

nemôže byť malý naraz pre všetky x reálne - a teda rad (18) nekonverguje rovnomerne v $\mathbb{R}$! Situácia je znázornená na obrázku 13.

1.28 Preskúmajme rovnomernú konvergenciu radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$$

v jeho obore konvergencie.
Riešenie: oborom konvergencie uvedeného radu je zrejme množina $[0, \infty)$. Pokúsime sa nájsť najlepší majorantný rad k zadanému - nájdeme teda maximá funkcií $f_n(x) = xe^{-nx}$ v množine $[0, \infty)$. Priebehy funkcií f_n sú pre niektoré n znázornené na grafe 14 - ako vidíme z obrázka, funkcie f_n majú jedno maximum, ktorého polohu ľahko zistíme pomocou diferenciálneho počtu.

$$f_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx) = 0 \;\Rightarrow\; x_M^{(n)} = \frac{1}{n}.$$

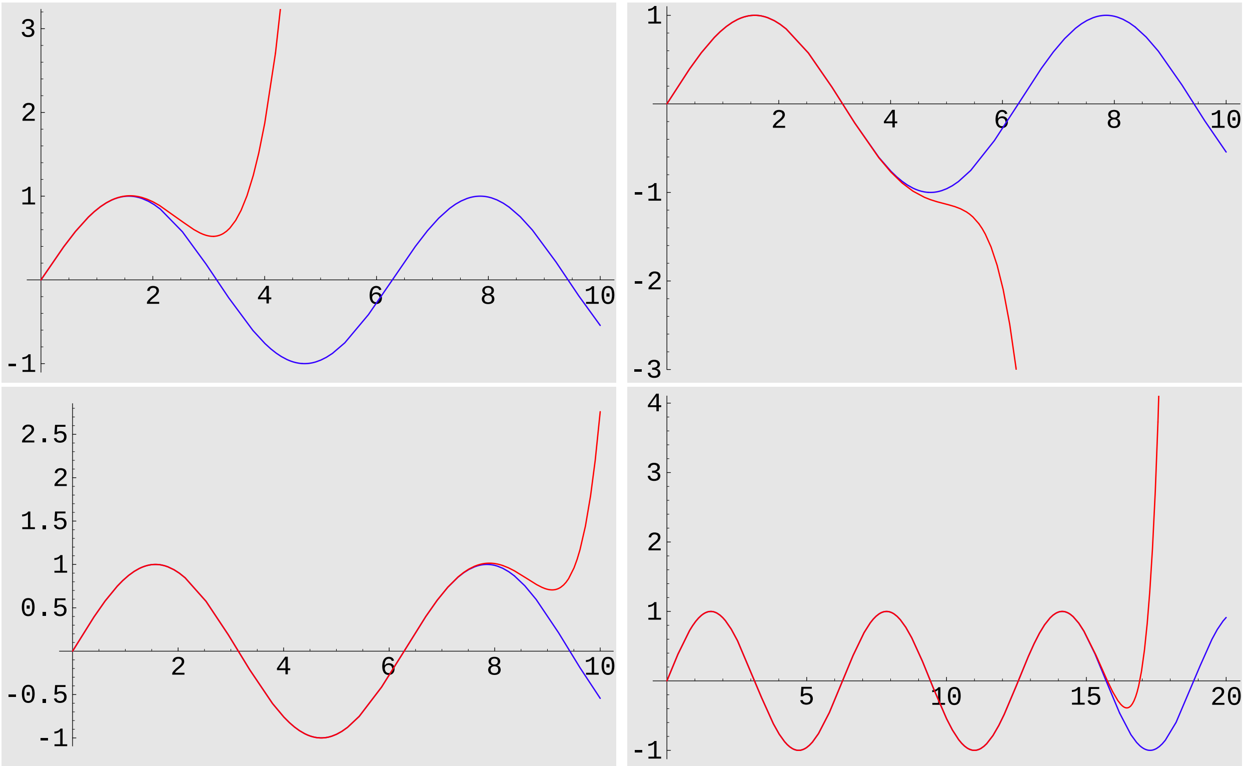
Takže najlepší výber čísel c_n je:

$$c_n = f_n(x_M^{(n)}) = \frac{e^{-1}}{n}.$$

Bohužiaľ, rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n}$$

[5]Pomocou Cauchy-Bolzanovej podmienky by sa tento "nedostatok" dal vynechať, ale dávame v tomto prípade prednosť názornosti pred rigoróznosťou.



Obr. 13: Porovnanie funkcie $\sin(x)$ s čiastočnými súčtami radu (18). Z ľava hore: druhý, piaty, desiaty a dvadsiaty čiastočný súčet radu (18).

zjavne diverguje - preto Weierstrassovo kritérium k nášmu prípadu nepovie nič. Zamyslime sa však ďalej nad situáciou. Body $x_M^{(n)}$ sa hromadia v okolí nuly - preto ak je problém s rovnomernou konvergenciou tak bude tam. Pozmeňme množinu na ktorej skúmame rad na množinu typu:

$$B_\delta = [\delta, \infty), \quad \delta > 0.$$

Potom zrejme existuje n_δ také, že pre každé $n > n_\delta$ je $x_M^{(n)} < \delta$ a teda platí, že pre $n > n_\delta$ je možné vziať za číslo c_n ľavú krajnú hodnotu funkcie f_n:

$$c_n = x \exp(-n\delta).$$

Rad čísel

$$\sum_{n>n_\delta} x \exp(-n\delta)$$

zjavne konverguje. Preto konštatujeme, že funkcionálny rad $\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$ konverguje rovnomerne v každej množine B_δ. Ďalej už s Weierstrassovým kritériom asi nepostúpime. Pozrime sa šak na explicitné vyjadrenie funkcie $f(x)$:

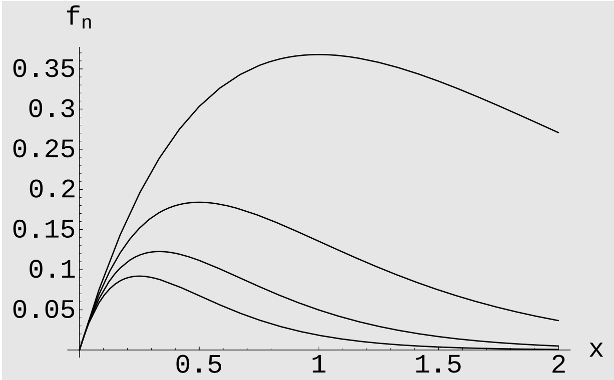
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ \frac{x}{1-e^{-x}} & , \quad x > 0 \end{cases}.$$

Funkcia $f(x)$ je znázornená na grafe 15. Keďže

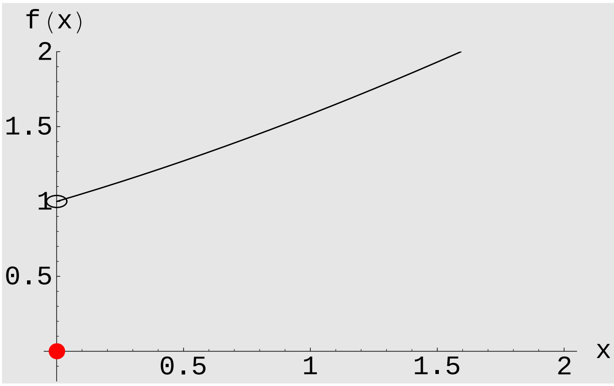
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq 0,$$

tak funkcia f je nespojitá v bode 0[6].

[6]Zanedlho ukážeme, že toto už znamená (v tejto situácii), že skúmaný rad nekonverguje rovnomerne v okolí (pravom) bodu nula



Obr. 14: Grafy funkcií f_n pre $n = 1, 2, 3, 4$ (krivky usporiadané od hora dole).



Obr. 15:

Pozrime sa teda, ako sa správa rozdiel čiastočného súčtu:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} xe^{-nx} = x\frac{1 - e^{-(N+1)x}}{1 - e^{-x}}$$

a súčtu radu $f(x)$ v okolí podozrivého bodu nula:

$$\Delta_N = |f(x) - S_N(x)| = \frac{xe^{-(N+1)x}}{1 - e^{-x}}.$$

Tieto rozdiely sú znázornené pre niektoréhodnoty N na grafe 16. Vidíme, že

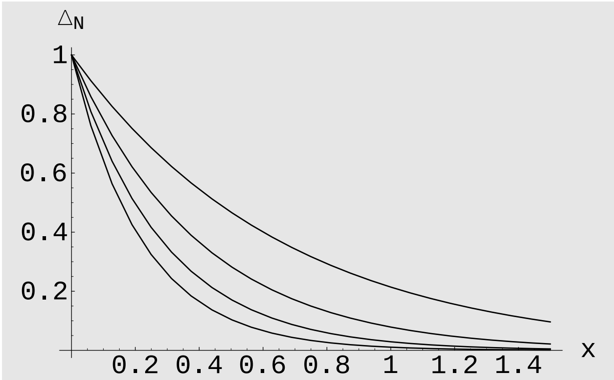
$$\lim_{x\to 0^+} \Delta_N = 1 > 0$$

takže fixnou hodnotou N nemôžeme zabezpečiť v celom okolí bodu 0 rovnakú presnosť aproximácie $f(x)$ pomocou čiastočného súčtu ak požadujeme, aby táto presnosť bola menšia ako 1 - a to je v spore s rovnomernou konvergenciou - teda náš rad nekonverguje rovnomerne v množinách typu $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$.

1.29 Dokážte použitím Weierstrassovho kritéria, že zadané rady konvergujú rovnomerne v zadaných množinách:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$, $x \in \mathbb{R}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) + \sin^2(nx)}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2(n)}\right)$, $x \in [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$, $x \in [0, \infty)$



Obr. 16: Zobrazenie rozdielov Δ_N, pre $N = 1, 2, 3, 4$ (krivky usporiadané od hora dole).

1.30 Rozhodnite, či zadaný funkcionálny rad konverguje rovnomerne v zadanej množine (využite, že ide v podstate o geometrický rad)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n, \ x \in [0,1].$$

1.31 Pre ktoré hodnoty parametru α možno na dôkaz rovnomernej konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2+n^\alpha}\right)$$

v $\mathbb{R}$ použiť Weierstrassove kritérium?

1.4 Spojitosť súčtu funkcionálneho radu, integrovanie a derivovanie funkcionálneho radu "člen po člene"

Uvažujeme funkciu zadanú ako súčet funkcionálneho radu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{20}$$

Platia tri dôležité (a pre praktické výpočty veľmi nápomocné) tvrdenia o spojitosti funkcii f, jej integrovateľnosti a diferencovateľnosti, tu sú:

✠ **veta o spojitosti súčtu radu**: nech funkcie f_n sú spojité v intervale $[a,b]$ a nech rad (20) konverguje v $[a,b]$ rovnomerne, potom aj súčet radu f je spojitá funkcia v $[a,b]$.

✓ dôkaz: nech x_0 je ľubovoľný bod intervalu $[a,b]$, zoberme k-ty čiastočný súčet

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad \text{špeciálne} \quad S_k(x_0) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x_0).$$

Zadefinujeme funkciu (zvyšok radu) R_k vzťahom

$$f(x) = S_k(x) + R_k(x), \quad \text{špeciálne} \quad f(x_0) = S_k(x_0) + R_k(x_0).$$

My potrebujeme ukázať, že rozdiel $|f(x) - f(x_0)|$ je pre dostatočne malé $|x - x_0|$ dostatočne malý. Odhadujme (s využitím trojuholníkovej nerovnosti):

$$|f(x)-f(x_0)| = |S_k(x) + R_k(x) - S_k(x_0) - R_k(x_0)| \leq |S_k(x) - S_k(x_0)| + |R_k(x)| + |R_k(x_0)| \tag{21}$$

Teraz zoberme akékoľvek $\epsilon > 0$. Rovnomerná konvergencia radu (20) zaručuje, že existuje také číslo $K(\epsilon)$, že pre každé $k > K(\epsilon)$ a pre každé $x \in [a, b]$ platí:

$$|R_k(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Tým sme odhadli posledné dva členy nerovnosti (21). Prvý člen tejto nerovnosti odhadneme nasledovne: funkcie $S_k(x)$ sú iba *konečné* súčty spojitých funkcií f_n, preto aj S_k sú spojité funkcie a to znamená, že ku každému $\epsilon > 0$ existuje také $\delta(\epsilon) > 0$, že pre každé x vzdialené od x_0 o menej ako $\delta(\epsilon)$ t.j. pre $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$ je

$$|S_k(x) - S_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{3},$$

čo završuje dôkaz. □

✓ príklad: v dôkaze sme naozaj použili predpoklad rovnomernej konvergencie radu (20), ale je prirodzené sa pýtať, či by sme sa predsa len nezaobišli aj bez nej. Tento príklad ukáže, že to nejde. Vezmime rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

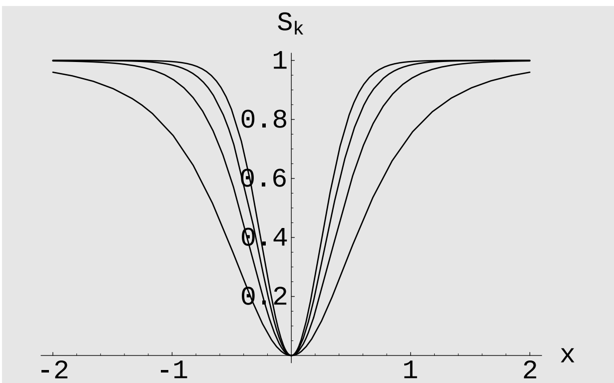
V prvom rade si všimnime, že členy radu sú spojité funkcie v celom $\mathbb{R}$. Ďalej, podľa Cauchyho kritéria:

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

tento rad konverguje v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Keďže je to v podstate geometrický rad, nájdeme priamo jeho súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x = 0, \\ 1 & \text{pre} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

T.j. suma radu (20) nie je spojitá v $\mathbb{R}$ - lebo nie je spojitá v bode 0. To je práve kvôli tomu, že rad (20) nekonverguje rovnomerne v okolí bodu 0. Situácia je znázornená na obrázku 17. ■



Obr. 17: Čiastočné súčty radu (20) $S_k(x)$, krivky oddola hore pre $k = 2, 4, 6, 8$. Vznik nespojitosti v bode $x = 0$ je zjavný.

✠ **veta o integrovaní funkcionálneho radu člen po člene**: predpokladáme, že členy radu (20) sú integrovateľné funkcie na intervale $[a, b]$ (tu je podstatné, že sa jedná o konečný interval!)a že rad (20) rovnomerne konverguje na $[a,b]$. Potom: funkcia f (suma radu (20)) je tiež integrovateľná v $[a,b]$ a naviac platí formula:

$$\forall c,d: \ [c,d] \subset [a,b]: \ \int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_c^d \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_c^d f_n(x)\mathrm{d}x\right].$$

✓ dôkaz: úlný dôkaz vety je pomerne zdĺhavý, ale ak nahradíme v predpokladoch integrovateľnosť funkcií f_n ich spojitosťou v $[a,b]$ (spojitá funkcia v uzvretom intervale je v ňom integrovateľná!) tak ľahko vetu dokážeme. V prvom rade integrovateľnosť funkcie f plynie z toho, že podľa predchádzajúcej vety je f spojitá v $[a,b]$ a teda ($\uparrow$) je integrovateľná. Zostáva dokázať uvedený vzorec. Ten tvrdí že číslo naľavo je rovné limite postupnosti čiastočných súčtov číselného radu napravo. Tak overíme, že to tak naozaj je. Vezmeme $\epsilon > 0$, potom z definície rovnomernej konvergencie nájdeme také $K(\epsilon) > 0$, že pre každé $k > K(\epsilon)$ a pre každé $x \in [a,b]$ je

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| < \epsilon,$$

takže pre takto vybrané k postupne dostávame

$$\left| \int_c^d f(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{k} \left[\int_c^d f_n(x)\mathrm{d}x\right] \right| = \left| \int_c^d f(x)\mathrm{d}x - \int_c^d \left[\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\mathrm{d}x\right] \right| = \left| \int_c^d \left[f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right] \mathrm{d}x \right|$$
$$\leq \int_c^d \left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| \mathrm{d}x \leq \epsilon(d-c). \quad \square$$

✠ **veta o derivovaní funkcionálneho radu člen po člene**: predpokladáme, že členy radu (20) sú spojite diferencovateľné funkcie na intervale $[a,b]$, že rad (20) rovnomerne konverguje (dobre, je známe, že tento predpoklad je zbytočný, ale to nevadí ...), ďalej, čo je ale podstatné predpokladáme, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \tag{22}$$

rovnomerne konverguje v $[a,b]$. Potom: funkcia f (suma radu (20)) je diferencovateľná na $[a,b]$ a platí naviac formula:

$$\forall x \in [a,b]: \ f'(x) = \left(\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]'\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

✓ dôkaz: je založený na predchádzajúcej vete, ukážeme, že pre každé $x \in [a,b]$ je

$$\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t = f(x) + C, \quad \text{kde} \quad \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),$$

čo presne znamená, že $f'(x) = \phi(x)$. Keď využijeme, že rad (22) konverguje rovnomerne v $[a,b]$ - t.j. môžeme ho integrovať člen po člene (funkcie f_n' sú spojité):

$$\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t\right] = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) + C. \quad \square$$

1.32 Vypočítajte integrál
$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n(n+1)}\right] \mathrm{d}x.$$
Riešenie: všetky funkcie
$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n(n+1)}$$
sú spojité v uzavretom intervale $[0,\pi]$, elementárna nerovnosť
$$0 \leq \frac{\sin^2(nx)}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
spolu s dobre známim faktom, že číselný rad
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
konverguje nám podľa Weierstrassovho kritéria zaručujú rovnomernú konvergenciu zadaného radu v intervale $[0,\pi]$ a to nám zase zaručuje, že môžeme integrovať člen po člene:
$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n(n+1)}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^\pi \sin^2(nx)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)\right) \mathrm{d}x =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4n}\sin(nx)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

1.33 (K zdôvodneniu príkladu 1.24) Uvažujeme kvantovomechanickú sústavu, ktorej vlastné energie E_n majú vlastnosti:
$$E_n \geq 0 \ (n \in \{0,1,2,3,\dots\}),\ E_{n+1} > E_n,\ \lim_{n\to\infty} E_n = \infty.$$
Ďalej uvažujeme inverznú teplotu $\beta \in (\beta_0,\infty)$, $\beta_0 > 0$. Vezmeme štatistickú sumu
$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \tag{23}$$
čo je funkcionálny rad (s premennou β). Vezmime rad z derivácií (podľa β) členov radu (23)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-E_n e^{-\beta E_n}\right], \tag{24}$$
kežde platí
$$\forall \beta \in (\beta_0,\infty) : \ \left|-E_n e^{-\beta E_n}\right| \leq E_n e^{-\beta_0 E_n}$$
a číselný rad
$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta_0 E_n}$$
je konvergentný, to znamená (Weierstrassove kritérium), že rad (24) konverguje rovnomerne (a absolútne) a teda rad (23) možno derivovať člen po člene, t.j. platí
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{Z}(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-E_n e^{-\beta E_n}\right].$$

Prirodzená definícia strednej energie sústavy je

$$\langle E\rangle_\beta = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = \frac{-\frac{\mathrm{d}\mathcal{Z}(\beta)}{\mathrm{d}\beta}}{\mathcal{Z}(\beta)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\ln\left[\mathcal{Z}(\beta)\right].$$

Tepelná kapacita C je definovaná ako množstvo tepla potrebného na zvýšenie teploty sústavy o jeden Kelvin, t.j.

$$C(\beta) = \frac{\mathrm{d}\langle E\rangle_\beta}{\mathrm{d}T}, \quad \text{ale} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{1}{kT^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} = -k\beta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}$$

a teda finálne dostávame

$$C(\beta) = k\beta^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\ln\left[\mathcal{Z}(\beta)\right]$$

ako sme mali v úlohe 1.24.

1.34 Preverme znova rovnomernú konvergenciu radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$$

v množine $[0,\infty)$.
Riešenie: v príklade 1.28 sme našli, že súčet radu $f(x)$ je funkcia nespojitá v bode nula. Členy totoho radu sú ale funkcie spojité v okolí bodu nula. Preto tento rad nemôže konvergovať rovnomerne v okolí bodu bodu nula a teda ani v množine $[0,\infty)$.

1.35 Preverme spojitosť a diferencovateľnosť tzv. *theta-funkcie* zadanej pre každé $x > 0$ funkcionálnym radom

$$\theta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}. \tag{25}$$

Riešenie: V prvom rade uvedený funkcionálny rad naozaj konverguje na množine $x > 0$ ako vidno z Cauchyho kritéria:

$$k(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-\pi n^2 x}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\pi n x} = 0 < 1$$

(a nekonverguje nikde inde, ako vidno z nutnej podmienky konvergencie radu). Dokážeme spojitosť θ v bode $x_0 > 0$. Pre zadané $x_0 > 0$ vezmime interval $[x_0/2,\infty)$ - pre každé x z tohoto intervalu platí nerovnosť

$$0 < e^{-\pi n^2 x} \leq 0 < e^{-\pi n^2 x_0/2}$$

a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x_0/2}$$

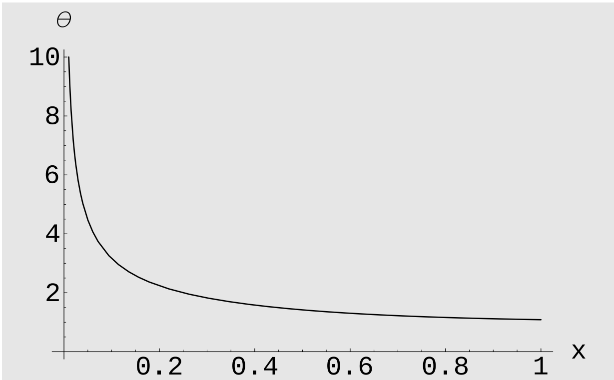
konverguje (zase podľa Cauchyho kritéria), preto podľa Weierstrassovho kritéria konverguje rad definujúci theta-funkciu rovnomerne v $[x_0/2,\infty)$. No a všetky funkcie $e^{-\pi n^2 x}$ sú v intervale $[x_0/2,\infty)$ spojité preto theta-funkcia je spojitá v bode x_0 - ten bol ale zvolený ako ľubovoľné kladné číslo, preto theta-funkcia je spojitá v $x > 0$.
Preveríme diferencovateľnosť theta-funkcie. Vezmeme rad z derivácií členov radu pre theta-funkciu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}\right)$$

a rovnako pre každé kladné x_0 platí, že pre každé $x \in [x_0/2, \infty)$ je

$$\left|-\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}\right| \leq \left|-\pi n^2 e^{-\pi n^2 x_0/2}\right| \quad \text{a rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\pi n^2 e^{-\pi n^2 x_0/2}\right)$$

konverguje. Preto podľa Weierstrassovho kritéria konverguje rad derivácií rovnomerne v $[x_0/2, \infty)$ a teda theta-funkcia je difrencovateľná v x_0 - ľubovoľnom kladnom čísle. Graf theta-funkcie je na obrázku 18.



Obr. 18: Graf theta-funkcie (25) - je to funkcia neohraničená v pravom okolí bodu 0, monotónne klesá a $\lim_{x\to\infty}\theta(x) = 1$.

1.36 Nájdite sumu radu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}. \tag{26}$$

Riešenie: najprv treba nájsť obor konvergencie zadaného radu, podľa Cauchyho kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 e^{-nx}} = \lim_{n\to\infty} n^{2/n} e^{-x} = e^{-x} \begin{cases} < 1 & \text{pre} \quad x > 0 \\ = 1 & \text{pre} \quad x = 0 \\ > 1 & \text{pre} \quad x < 0 \end{cases}$$

vidíme, že zadaný rad:

- konverguje pri $x > 0$
- diverguje pri $x < 0$.

Zostáva preveriť bod $x = 0$: nakoľko pri $x = 0$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie, tak obor konvergencie radu (26) je interval $(0, \infty)$. Naviac platí: rad (26) konverguje rovnomerne v každom intervale (a, ∞) s $a > 0$ rovnomerne, čo plynie z Weierstrassovho kritéria takto: platí nerovnosť

$$\forall x > a : \ 0 < n^2 e^{-nx} < n^2 e^{-na}$$

a číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-na}$$

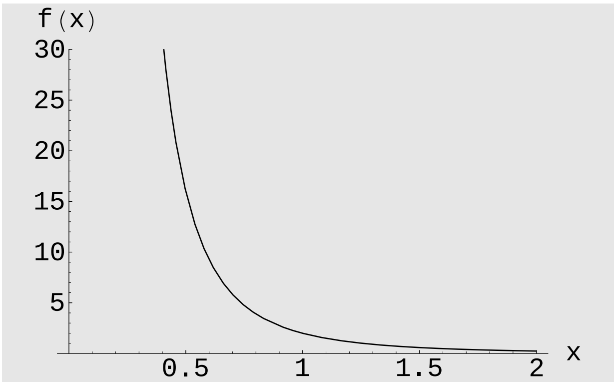
je konvergentný (integrálne kritérium). Presne rovnako sa ukáže aj rovnomerná konvergencia radov (v intervale (a, ∞)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \ .$$

To ale znamená, že za účelom nájdenia sumy radu (26) môžeme použiť počlenné derivovanie funkcionálneho radu, čo postupne dáva:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(ne^{-nx}\right)' = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-nx}\right)'\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\right)'' =$$
$$\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)'' = \frac{e^{x}\left(1+e^{x}\right)}{\left(e^{x}-1\right)^{3}}.$$

Funkcia $f(x)$ - súčet radu - je znázornená na obrázku 19.



Obr. 19:

2 Mocninové (potenčné) rady

2.1 Polomer konvergencie potenčného radu, charakter konvergencie potenčného radu

Špeciálny prípad funkcionálneho radu je tzv. mocninný (potenčný) rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad a_n, x_0 \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Čśila a_n sú koeficienty potenčného radu a podľa čísla x_0 hovoríme o potenčnom rade so stredom v x_0. Nakoľko lineárnou zámenou premennej x: $x - x_0 \mapsto y$ jednoducho dostávame z radu (27) rad so stredom v bode 0, budeme sa baviť o takomto rade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{28}$$

Základné vlastnosti potenčných radov sú zhrnuté tu:

✠ **základná veta o obore konvergencie potenčného radu**: ak rad (28) konverguje v bode X tak potom konverguje absolútne v každom x: $|x| < |X|$.

✓ dôkaz: dokážeme to takto: podľa predpokladu číselný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

konverguje a to znamená, že (nutná podmienka konvergencie radu):

$$\lim_{n\to\infty} a_n X^n = 0.$$

To ale znamená, že postupnosť

$$\{a_n X^n\}_{n=0}^{\infty}$$

je ohraničená a teda existuje číslo $M > 0$, že pre každé n je

$$|a_n X^n| < M.$$

V prvom rade spomeňme prípad $X = 0$ - ten je triviálny a preto v ďaľšom predpokladáme $X \neq 0$. Odhadnime (s užitím toho, že $|x/X| < 1$) členy radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$|a_n x^n| = \left| a_n X^n \frac{x^n}{X^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{X} \right|^n ,$$

čo znamená, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pre: $-|X| < x < |X|$ konverguje rovnako ako geometrický rad s kvocientom

$$\left| \frac{x}{X} \right| < 1 . \quad \square$$

✓ poznámka: ujasnime si, že v predchádzajúcej vete nemožno tvrdiť, že by rad (28) konvergoval v každom x: $|x| \leq |X|$ - hoci by sme touto modifikáciou pridali jediný bod - menovite bod $x = -X$. Vidno to z nasledovného príkladu: vezmeme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Podľa Leibnitzovho kritéria tento rad konverguje v bode $x = 1$, avšak v bode $x = -1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

čo je divergentný harmonický rad.

✓ dôsledok: existuje nezáporné číslo - **polomer konvergencie potenčného radu** - R (alebo pripúšťame aj $R = \infty$), že obor konvergencie radu (28) je interval jedného z typov:

* $(-R, R)$
* $(-R, R]$
* $[-R, R)$
* $[-R, R]$.

Na výpočet polomeru konvergencie R existujú formule:

✠ **polomer konvergencie potenčného radu - vzorec č. 1 (alebo Cauchy-Hadamardov vzorec)**:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{29}$$

kde vec myslíme tak, že ak menovateľ vyjde 0 berieme $R = \infty$.

✓ poznámka: pokiaľ existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

✠ **polomer konvergencie potenčného radu - vzorec č. 2**: ak existuje limita na pravo (vlastná alebo nevlastná) tak platí:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{30}$$

✠ **charakter konvergencie potenčného radu vo vnútri intervalu konvergencie**: nech je polomer konvergencie radu (28) rovný kladnému číslu R, potom v každom intervale $[-\rho, \rho]$, kde $0 < \rho < R$, konverguje rad (28) rovnomerne.

✓ dôkaz: podľa predpokladu je číselný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$$

absolútne konvergentný a vzhľadom na nerovnosť:

$$\forall x \in [-\rho, \rho] \;\&\; \forall n \in \mathbb{N}_0 : \;|a_n x^n| \leq |a_n \rho^n|$$

usudzujeme podľa Weierstrassovho kritéria, že tvrdenie je správne. □

2.1 Nájdite polomer konvergencie a obor konvergencie potenčného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n.$$

Riešenie: Koeficient stojaci pri x^n je

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}.$$

Polomer konvergencie vypočítame ľahko pomocou vzťahu (29) - dokonca existuje príslušná limita:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}} = 3.$$

Takže

$$R = \frac{1}{3}.$$

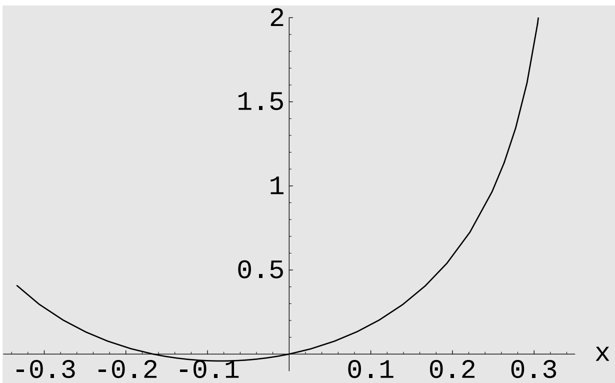
Takže v obore konvergencie je určite (otvorený!) interval $(-1/3, 1/3)$ a ešte je možné, že aj niektorý (alebo aj oba) z jeho krajných bodov. Toto treba ešte preveriť. Na to preskúmame, či konverguje zadaný rad ak za x dosadíme najprv $1/3$ a potom $-1/3$. Urobme to: máme najprv rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right]$$

tu vidíme, že má divergentnú harmonickú časť, preto bod $x = 1/3$ nepatrí do oboru konvergencie. Zato však ak dosadíme bod $-1/3$ máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$$

čo sú dva konvergentné rady (prvý z nich podľa Leibnitzovho kritéria, druhý je menší ako geometrický rad s kvocientom rovným $2/3$.) Takže bod $-1/3$ patrí do oboru konvergencie, ktorý je teda rovný intervalu: $[-1/3, 1/3)$. Súčet tohoto radu je znázornený na grafe 20.



Obr. 20:

2.2 Nájdite polomer konvergencie funkcionálneho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n).$$

Riešenie: Pri x^n stojí koeficient

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Na výpočet polomeru konvergencie je tentokrát výhodnejšie použiť vzťah (30):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

2.3 Využijúc metódy hladania oboru konvergencie potenčného radu, nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$

Riešenie: Ak v zadanom rade položíme

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

tak máme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} y^n,$$

ktorého polomer konvergencie ľahko nájdeme podľa vzťahu (30):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

Obor konvergencie obsahuje aj bod -1 ale neobsahuje bod 1 (t.j. obor konvergencie je $[-1, 1)$), lebo rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \;-\; \text{konverguje} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \;-\; \text{diverguje}\ .$$

Takže obor konvergencie pôvodného radu je určený nerovnosťami:

$$-1 \le \frac{1-x}{1+x} < 1,$$

ktorých riešením je: $x > 0$.

2.4 Nájdite polomer konvergencie potenčného radu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}.$$

Riešenie: Najprv identifikujme správne koeficienty a_n (totiž podľa formuly (28) je a_n to, čo stojí pri x^n):

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = 3 \qquad a_3 = 0 \qquad a_4 = 9 \qquad a_5 = 0 \qquad a_6 = 27 \qquad \text{atď},$$

takže v obecnosti ak k je prirodzené číslo alebo nula

$$a_{2k} = 3^k, \quad a_{2k+1} = 0.$$

Takže

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3^n} = \sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Overíme krajné body $x = \pm 1/\sqrt{3}$

$$(x = 1/\sqrt{3}) : \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \;-\; \text{diverguje}$$

$$(x = -1/\sqrt{3}) : \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \;-\; \text{diverguje},$$

takže obor konvergencie je interval

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.5 Nájdite polomer konvergencie a obor konvergencie potenčných radov:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$	$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$
$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n} x^n$	$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n)} x^n$	$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{3n}$
$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} x^n$	$h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$	$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

2.2 Derivovanie a integrovanie potenčných radov, sumovanie niektorých potenčných radov

✠ Z viet o rovnomernej konvergencii potenčného radu v uzavretom podintervale oboru konvergencie plynie, že potenčný rad (28) možno derivovať a integrovať člen po člene v rámci jeho polomeru konvergencie ľubovoľne veľa krát. Naviac týmito operáciami dostávame potenčné rady s rovnakým polomerom konvergencie.

✓ Poznámka: derivovanie a ontegrovanie potenčného radu člen po člene síce nemenia polomer konvergencie, ale môže zmeniť obor konvergencie radu (samozrejme len o krajný bod(y)) a to menovite tak, že integrovanie môže pridať k oboru konvergencie niektorý z krajných bodov a derivovanie môže niektorý z krajných bodov odobrať z oboru konvergencie ako to ukazuje nasledovný príklad: vezmeme jednoduchý geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

ktorého obor konvergencie je $(-1,1)$. Ak zobereme $x \in (-1,1)$ tak integrovaním tohoto radu člen po člene dostávame rad

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right] \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^x t^n \mathrm{d}t\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

ktorého obor konvergencie je $[-1,1)$. Myšlienku derivovania alebo integrovania potenčného radu člen po člene môže byť použitá na nájdenie súm niektorých radov.

2.6 Nájdite súčet radu

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Riešenie: Polomer konvergencie zadaného radu je ($a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = 1/(2n+1)$)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}} = 1\ .$$

V oboch krajných bodoch rad diverguje ako harmonický rad, preto obor konvergencie radu je $(-1,1)$. Vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Takže máme

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C.$$

Konštantu C určíme z toho, že ak dosadíme do zadania funkcie f hodnotu $x = 0$, tak máme

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

2.7 Vypočítajte súčet radu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n. \tag{31}$$

Riešenie: V prvom rade, polomer konvergencie tohoto radu je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

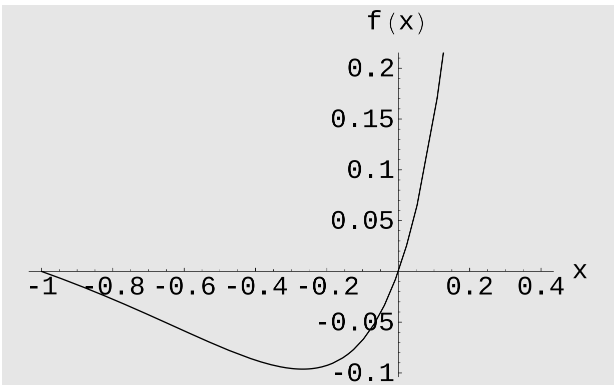
a obor konvergencie je $(-1, 1)$ nakoľko rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

ani nutnú podmienku konvergencie nespĺňajú. S využitím možnosti derivovať rad člen po člene postupne dostávame

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right)' = x\left(x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right)' =$$
$$x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}. \tag{32}$$

Graf tejto funkcie je na obrázku 21.



Obr. 21: Graf funkcie (32) definovanej v intervale konvergencie radu (31): $(-1, 1)$, v intervale $(0, 1)$ táto funkcia rastie a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

2.8 Nájdite (pomocou derivovania alebo integrovania potenčného radu člen po člene) súčty radov:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad .$$

2.3 Taylorove rady, definícia, Taylorove rady elementárnych funkcií

✠ **definícia Taylorovho radu**: nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x_0 a nech má derivácie každého rádu v bode x_0. Takejto funkcii priradíme potenčný rad so stredom v bode x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{33}$$

Ak platí rovnosť

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

v niektorom okolí bodu x_0, tak funkciu f voláme analytickou (v príslušnom intervale). Špeciálny prípad s $x_0 = 0$ sa zvykne nazývať Mac Laurinov rad funkcie f. (my budeme skôr hovoriť Taylorov rad so stredom v 0.)

✠ **Taylorove rady elementárnych funkcií**: platia nasledovné dôležité rovnosti

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{34}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{35}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{36}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad -1 < x < 1 \tag{37}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad -1 < x \leq 1 \tag{38}$$

Využijúc tieto rozklady možno do Taylorovho radu rozložiť mnohé ďalšie funkcie.

✓ Poznámka1: v (37) sme zaviedli zovšeobecnenie kombinačného čísla pre reálne hodnoty α:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

✓ Poznámka2: špeciálny prípad formuly (37) (tzv. Newtonovho binómu) je prípad s $\alpha = -1$, keď máme vlastne formulu pre dôverne známu sumu geometrického radu s kvocientom rovným $-x$:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

✓ Poznámka3: druhý špeciálny prípad vzťahu (37) známi zo strednej školy nastáva, keď je α rovné prirodzenému číslu (povedzme n) - vtedy vzťah (37) je zhodný s binomickou vetou:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k,$$

ktorá platí pre každé reálne x.

2.9 Rozložte do Taylorovho radu so stredom v 0 funkciu $\sin^2(x)$.

Riešenie: využijeme stredoškolskú trigonometriu a vyššie uvedený rozvoj pre funkciu $\cos(x)$ a máme postupne

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Polomer konvergencie nájdeného radu je ∞ - to vidno z postupu, ktorým sme ho odvodili - použili sme len rozvoj pre funkciu cos, ktorý má polomer konvergencie ∞. Môžeme sa o tom ale presvedčiť aj priamo. Ak zavedieme premennú $y = x^2$ tak skúmame potenčný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}y^n,$$

ktorého polomer konvergencie zrátame podľa (30)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+2}2^{2n+1}}{(2n+2)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{4(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{4} = \infty.$$

Toto je polomer konvergencie v premennej y - ale zobrazenie $y \mapsto x^2$ hovorí, že aj v premennej x je R nekonečno.

2.10 Rozložte do Taylorovho radu so stredom v bode 4 funkciu $\ln(x)$.

Riešenie: Využijeme vlastnosti logaritmu a rozvoj (38):

$$\ln(x) = \ln(4 + (x-4)) = \ln\left[4\left(1 + \frac{x-4}{4}\right)\right] = \ln(4) + \ln\left[1 + \frac{x-4}{4}\right] = \ln(4) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n n}(x-4)^n.$$

Polomer konvergencie tohoto radu je (podľa (29))

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n4^n}\right|} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4.$$

2.11 Rozložte do Taylorovho radu so stredom v 0 funkciu $x\sqrt{1+5x}$.

Riešenie: Vyjdeme z (37) a máme:

$$x\sqrt{1+5x} = x(1+5x)^{1/2} = x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(5x)^n = x\left[1 + \frac{1}{2}5x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}5^2x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}5^3x^3 + \dots\right]$$
$$= x + \frac{1}{2}5x^2 - \frac{1}{2^2 2!}5^2x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}5^3x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}5^4x^5 + \dots\dots =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!5^n}{2^n n!}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-5)!!5^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}x^n,$$

kde sme zaviedli symbol (dvojný faktoriál):

$$k - \text{párne}: \; k!! = 2\cdot 4\cdot 6\dots k \qquad\qquad k - \text{nepárne}: \; k!! = 1\cdot 3\cdot 5\dots k$$

a dohodu, že dvojný faktoriál nuly a každého záporného čísla je 1. Polomer konvergencie zrátame podľa (30)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}(2n-5)!!5^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}}{\frac{(-1)^n(2n-3)!!5^n}{2^n(n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5(2n-3)} = \frac{1}{5}.$$

2.12 Rozložte do Taylorovho radu so stredom v 5 funkciu $1/(x+1)$.

Riešenie:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{6+(x-5)} = \frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{x-5}{6}} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-6}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(x-5)^n.$$

Polomer konvergencie podľa (29) je

$$\lim n\to\infty\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}\right|} = \frac{1}{6} \Rightarrow R = 6.$$

2.13 Rozložte do Taylorovho radu so stredom v 2 funkciu

$$\frac{1}{x(1+x)(1-x)}.$$

Riešenie: Je založené na (37) a rozklade na parciálne zlomky. Urobíme najpr ten rozklad

$$\frac{1}{x(1+x)(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x} \Rightarrow \left|\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ -A-B+C & = & 0 \\ B+C & = & 0 \end{array}\right| \Rightarrow A=1,\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}.$$

Ďalej teda máme

$$\frac{1}{x(1+x)(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{-1-(x-2)} - \frac{1}{2}\frac{1}{3+(x-2)} =$$
$$\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+(x-2)} - \frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^2$$
$$-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right](x-2)^n.$$

Polomer konvergencie ľahko určíme podľa (29):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right]\right|} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

2.14 Rozložte zadané funkcie do Taylorovho radu s určeným stredom x_0:

a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+5x}},\ x_0 = 0$ *b)* $e^{-x},\ x_0 = 0$ *c)* $\dfrac{x}{1-x},\ x_0 = 0$

d) $\dfrac{1}{(1-x)^2},\ x_0 = 0$ *e)* $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ x_0 = 0$ *f)* $\sin(x),\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

g) $\sin^3(x),\ x_0 = 0$ *h)* $\dfrac{1-x^2}{1+x^3},\ x_0 = 0$ *i)* $\sqrt{x},\ x_0 = 1$

j) $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)},\ x_0 = 0$ *k)* $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)},\ x_0 = 3$ *l)* $\ln[(1+x)(1+x^2)],\ x_0 = 0$

2.15 Nájdite rozklad funkcie $\arctan(x)$ do Taylorovho radu so stredom v bode 0.

Riešenie: riešenie sa zakladá na možnosti derivovať funkciu zadanú potenčným radom člen po člene (a integrovať tak isto). Ak označíme $f(x) = \arctan(x)$, tak potom

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Polomer konvergencie tohoto radu je 1. Preto s využitím toho, že $\arctan(0) = 0$ dostávame pre každé $x: \ |x| < 1$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{39}$$

Pozn.: uvedený rad pre funkciu arctan konverguje aj v bode $x = 1$, preto (toto je obsahom tzv. *druhej Abelovej vety*) platí rovnosť (39) aj vtedy ak dosadíme naľavo aj napravo $x = 1$, keďže však $\arctan(1) = \pi/4$, tak pomocou (39) máme vyjadrenie čísla π v tvare nekonečného radu:

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{40}$$

Tento rad, treba povedať, nie je ktovieako rýchle konvergentný.

2.16 Koľko členov radu (40) stačí vziať, aby sme číslo π zrátali s prestnosťou 10^{-4}?

2.17 Rozložte do Taylorovho radu so stredom v 0 funkciu $\arcsin(x)$.
Riešenie: Podľa (37) rozložíme najprv deriváciu zadanej funkcie

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} (-1)^n =$$

$$1 - \frac{-\frac{1}{2}}{1!} x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} x^4 - \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}.$$

Kde polomer konvergencie radu je 1. Keďže $\arcsin(0) = 0$, tak pre každé $x: \ |x| < 1$ máme

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}. \tag{41}$$

Bod 1/2 leží vnútri oboru konvergencie radu (41) a platí: $\arcsin(1/2) = \pi/6$ alebo inak $\pi = 6 \arcsin(1/2)$, preto máme ďaľšie vyjadrenie pre číslo π v tvare nekonečného radu:

$$\pi = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n+1} n! (2n+1)} \tag{42}$$

2.18 Koľko členov radu (42) stačí vziať, aby sme zrátali číslo π s presnosťou 10^{-4}? Porovnajte s úlohou 2.16.

2.19 S využitím (37) vypočítať hodnotu $\sqrt[3]{10}$.
Riešenie: Postupujeme nasledovne

$$\sqrt[3]{10} = (8+2)^{1/3} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{1/3}.$$

A teraz využijeme (37) s $\alpha = 1/3$ a $x = 1/4$, máme

$$\sqrt[3]{10} = 2 \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!} \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)}{2!} \frac{1}{4^2} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)}{3!} \frac{1}{4^3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{-8}{3}\right)}{4!} \frac{1}{4^4} + \ldots \right\} =$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-2)}{n!} \frac{1}{12^n}.$$

V riešení sme použili rozklad $10 = 8 + 2$, kde sme boli motivovaný tým, že $\sqrt[3]{8} = 2$. Takýchto rozkladov desiatky je pravda nekonečne veľa. Niektoré sú použiteľne niektoré nie. Vezmime dva rozklady:

$$\sqrt[3]{1+9} = (1+9)^{1/3} \qquad\qquad \sqrt[3]{64-54} = 4\left(1-\frac{27}{32}\right)^{1/3}.$$

Prvý z nich je z pohľadu formuly (37) nepoužiteľný nakoľko $9 > 1$ - teda sme mimo oboru konvergencie radu (37). Druhý prípad je síce teoreticky v poriadku, ale je to horšia voľba ako vyššie podané riešenie, lebo zlomok $27/32$ je už moc blízko k jednej (a ako vidíme, zbytočne blízko k jednej).

2.20 Rozložte do Taylorovho radu funkciu (tzv. integrálny sínus - nie je to elementárna funkcia)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

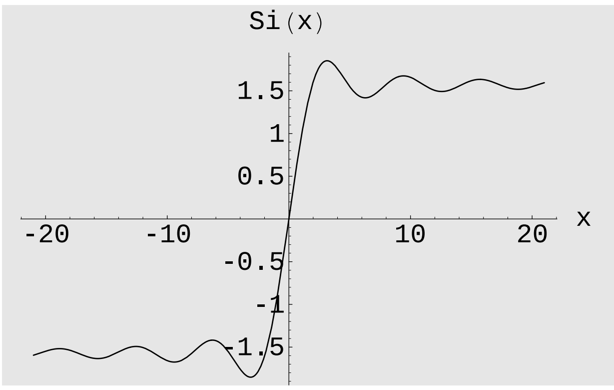
Riešenie: Podintegrálna funkcia má Taylorov rad

$$\frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n},$$

ktorého polomer konvergencie je ∞ - ako sa ľahko možno presvedčiť. Preto tento rad konverguje rovnomerne v každom ohraničenom intervale a preto možno zameniť integrovanie a sumáciu:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Polomer konvergencie tohoto radu je samozrejme tiež ∞. Graf funkcie Si je na obrázku 22.



Obr. 22: Graf integrálneho sínusu; je to nepárna funkcia, dá sa ukázať, že $\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$.

2.21 Nájdite hodnotu

$$C = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x \tag{43}$$

s presnosťou 10^{-3}. (Jedná sa o tzv. *Catalanovu konštantu*).

Riešenie: Rozložíme podintegrálnu funkciu do Taylorovho radu, pričom využijeme, že už poznáme rozklad funkcie $\arctan(x)$:

$$\frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}.$$

Polomer konvergencie tohoto radu je 1 ale naviac v bode $x = +1$ tento rad konverguje - podľa Leibnitzovho kritéria - toto zaručuje, že číslo C môžeme počítať takto:

$$C = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Takže zatiaľ máme Catalanovu konštantu v tvare nekonečného radu. Ten teraz treba zosumovať s požadovanou presnosťou. Využijeme, že sa jedná o rad členy ktorého striedajú znamienka a ich moduly monotónne klesajú k nule. Preto ohad chyby $N-$tého čiastočného súčtu

$$C_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+2)^2}$$

je

$$|R_N| \le \frac{1}{(2N+3)^2}.$$

Podľa našej požiadavky mábyť $|R_N| \le 10^{-3}$, preto ak vezmeme N aspoň

$$N = \frac{1}{2\sqrt{10^{-3}}} \approx 16$$

bude to stačiť a dostaneme

$$C \approx 0.916\ .$$

2.4 Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou potenčných radov

2.22 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice vyhovujúce zadaným počiatočným podmienkam v tvare potenčného radu

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Riešenie: Táto úloha je čiste vysvetľujúca princíp, nakoľko zadaná diferenciálna rovnica má známe (a jednoduché) riešenie v tvare elementárnych funkcií, menovite jej obecné riešenie je

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

a riešenie vyhovujúce zadaným podmienkam v bode 0 je samozrejme $y(x) = \sin(x)$. Vysvetlíme si však ako dôjsť k tomuto výsledku použitím potenčných radov. Predpokladajme riešenie v tvare radu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Našou úlohou je vlastne nájsť čísla a_n. To znamená, že

$$y''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Tieto výrazy dosadíme do ľavej strany zadanej rovnice a upravíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} \right] x^n.$$

Myšlienka riešenia je teraz v tom, že rovnosť:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = 0,$$

ktorá máplatiť pre každé x z nejakého intervalu znamená, že všetky čísla α_n sú rvné nule. V našom prípade máme rovnosť

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}\right] x^n = 0 \Rightarrow a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \ (\forall n \in \{0,1,2,\dots\}),$$

ktorá predstavuje rekurentný predpis na výpočet koeficientov a_n, menovite

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}. \tag{44}$$

Ďalej musíme zohľadniť zadané počiatočné podmienky na funkciu $y(x)$. To urobíme z definičného vzťahu pre Taylorov rad funkcie $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}.$$

No a mi mńe zadané, že $y(0) = 0$ a $y'(0) \equiv y^{(1)}(0) = 1$, takže to znamená, že

$$a_0 = 0 \qquad\qquad a_1 = 1.$$

No a teda rekurentná formula (44) nám dáva:

$$\begin{array}{lllll} a_2 = 0, & a_4 = 0, & a_6 = 0, & \dots & a_{2k} = 0 \\ a_3 = -\dfrac{1}{2\cdot 3}, & a_5 = \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, & a_7 = -\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}, & \dots & a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \end{array}$$

kde $k \in \{0,1,2,3,\dots\}$. Takže finálne máme riešenie rovnice vyhovujúce počiatočným podmienkam

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

čo pravda nie je nič iné (viď (35)), ako Taylorov rad funkcie $\sin(x)$, t.j. $y(x) = \sin(x)$.

2.23 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice spĺňajúce zadané počiatočné podmienky v tvare potenčného radu so stredom v bode 0:

$$(1-x)y''(x) + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Riešenie: hľadáme riešenie v tvare radu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ľavá strana zadanej diferenciálne rovnice teda je rovná

$$(1-x)y''(x) + xy' - y = (1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} -$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (2a_2 - a_0) + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)n a_{n+1} + (n-1)a_n\right] x^n,$$

takže musíme splniť rekurentné vzťahy:

$$\begin{aligned} 2a_2 - a_0 &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n &= 0, \quad n \in \{0,1,2,3,\dots\}. \end{aligned} \tag{45}$$

ku ktorým pristupujú počiatočné podmienky:

$$a_0 = 1, \qquad\qquad a_1 = 1.$$

Z prvého zo vzťahov (45) máme, že $a_2 = 1/2$ a ďalej pomocou druhého dostávame:

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_n + \frac{n}{n+2}a_{n+1},$$

takže

$$a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{1}{6}, \qquad a_4 = \frac{1}{24}, \qquad a_5 = \frac{1}{120}, \qquad \dots$$

Tieto čísla napovedajú, že by mohla platiť formula

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

a naozaj

$$-\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}\frac{1}{n!} + \frac{n}{n+2}\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)!}\left[-n+1-n\right] = \frac{1}{(n+2)!}.$$

Takže riešenie našej úlohy je (s využitím (34)):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x.$$

2.24 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-1)y(x) = 0$$

v tvare potenčného radu so stredom v bode 0.

Riešenie: Predpokladáme teda riešenie v tvare

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dosadením do ľavej strany zadanej rovnice máme

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} - \sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n =$$
$$-a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2} - a_n\right]x^n = -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n^2-1) + a_{n-2}\right]x^n.$$

T.j. máme systé vzťahov pre koeficienty a_n:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n(n^2-1) + a_{n-2} &= 0, \end{aligned}$$

z ktorých vidíme, že všetky párne koeficienty sú rovné nule, koeficient a_1 je ľubovoľný a ďaľšie nepárne koeficienty vypočítame z:

$$a_n = -\frac{1}{n^2-1}a_{n-2}, \quad n = 2k+1,\ k \in \{1,2,3\dots\}.$$

Malou úpravou

$$a_{2k+1} = \frac{-1}{(2k+1)^2-1}a_{2k-1} = \frac{-1}{(2k+1)^2-1}\frac{-1}{(2k-1)^2-1}a_{2k-3} = \frac{-1}{(2k+1)^2-1}\frac{-1}{(2k-1)^2-1}\frac{-1}{(2k-3)^2-1}a_{2k-5}$$
$$= \frac{-1}{(2k+1)^2-1}\frac{-1}{(2k-1)^2-1}\frac{-1}{(2k-3)^2-1}\cdots\frac{-1}{25-1}\frac{-1}{9-1}a_1 =$$
$$\frac{-1}{(2k+2)(2k)}\frac{-1}{(2k)(2k-2)}\frac{-1}{(2k-2)(2k-4)}\cdots\frac{-1}{6\cdot 4}\frac{-1}{4\cdot 2}a_1 = \frac{(-1)^k 2}{(2k+2)!!(2k)!!}a_1.$$

Využijúc ešte

$$(2k)!! = 2^k k!$$

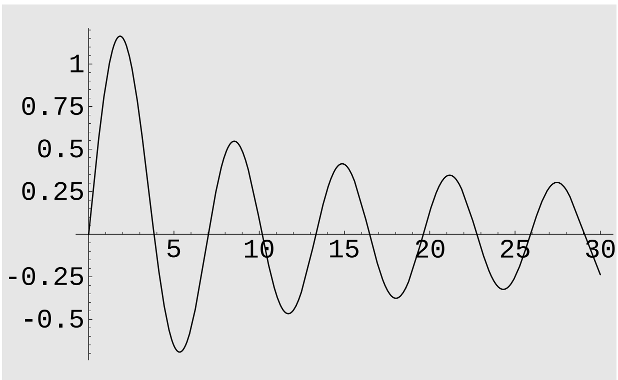
máme

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}a_1.$$

Takže hľadané riešenie je

$$y(x) = a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}x^{2k+1}.$$

Graf tejto funkcie s výberom $a_1 = 1$ je na obrázku 23.



Obr. 23:

2.25 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$y''(x) + xy(x) = 0,$$

ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

v tvare potenčného radu so stredom v bode 0.

Riešenie: Predpokladáme teda, že riešenie sa rozkladá do radu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dosadením do ľavej strany rovnice máme

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} =$$
$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2)a_{n+3} + a_n\right] x^{n+1}.$$

Takže koeficienty $a+n$ musia vyhovovať rekurentným vzťahom

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} + a_n &= 0, \end{aligned}$$

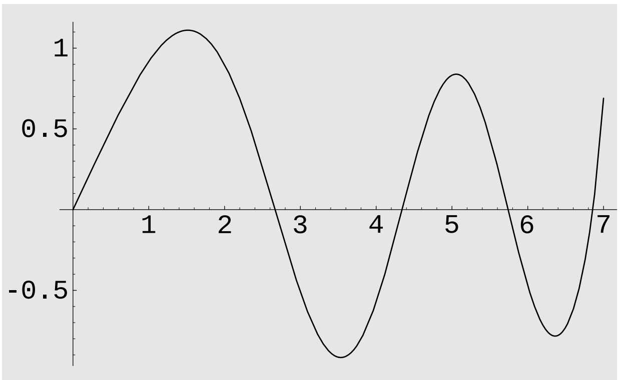
ktoré, spolu s počiatočnými podmienkami, hovoria, že nenulové sú len koeficienty:

$$a_1 = 1 \qquad a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3} \qquad a_7 = \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} \qquad a_{10} = -\frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} \qquad \ldots$$

a riešenie je

$$y(x) = x - \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 - \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \ldots\ . \tag{46}$$

Graf riešenia je na obrázku 24.



Obr. 24: Graf funkcie (46) pre kladné hodnoty jej argumentu.

2.26 Vyriešte v tvare potenčného radu diferenciálne rovnice spolu s počiatočnými podmienkami:

a) $y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2$

b) $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$

c) $y'''(x) + xy(x) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$

d) $y'''(x) + xy'(x) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$

e) $y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 1 + x^3,\ y(0) = y'(0) = 0$

f) $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = x^3,\ y(0) = y'(0) = 0$

2.27 Ktoré z nasledovného je/nie je pravda o funkcii (46):

- je párna
- je nepárna
- nie je párna ani nepárna
- je periodická

- pre $x < 0$ je rastúca
- pre $x < 0$ je konvexná
- pre $x < 0$ je záporná
- platí:

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty.$$

3 Ortogonálne systémy funkcií, Fourierove rady

3.1 Ortogonálny a ortonormálny systém funkcií na intervale, ortogonálnosť systému trigonometrických funkcií

✠ **množina funkcií ako lineárny (vektorový) priestor**: množinav setkých funkcií definovaných a po častiach spojitých na intervale $[a, b]$ tvorí lineárny (vektorový) priestor, keď pod súčtom vektorov rozumieme bežný súčet funkcií:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

a pod skalárnym násobkom funkcie rozumieme súčin reálneho čísla (konštanty) a funkcie:

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

✠ **skalárny súčin funkcií**: skalárnym súčinom dvoch funkcií definovaných a po častiach spojitých na intervale $[a, b]$ rozumieme

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

✠ **definícia ortogonálneho systému funkcií**: uvažujeme postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_n$ definovaných a po častiach spojitých na intervale $[a, b]$ a takých, že pre každé n je

$$\int_a^b (f_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Hovoríme, že tento systém funkcií je *ortogonálny* ak

$$\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x = 0 \quad i \neq j.$$

✠ **ortonormálny systém funkcií**: ortogonálny systém funkcií $\{f_n(x)\}_n$ na intervale $[a, b]$ sa volá *ortonormálny* ak naviac platí pre každú z týchto funkcií :

$$\int_a^b f_n(x) \cdot f_n(x)\mathrm{d}x \equiv \int_a^b (f_n(x))^2 \,\mathrm{d}x = 1.$$

✓ "Výroba" ortonormálneho systému funkcií zo zadaného ortogonálneho systému: ak systém $\{f_n(x)\}_n$ je ortogonálny na $[a, b]$, tak potom systém funkcií

$$\left\{ \frac{f_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (f_1(x))^2 \,\mathrm{d}x}}, \frac{f_2(x)}{\sqrt{\int_a^b (f_2(x))^2 \,\mathrm{d}x}}, \frac{f_3(x)}{\sqrt{\int_a^b (f_3(x))^2 \,\mathrm{d}x}}, \frac{f_4(x)}{\sqrt{\int_a^b (f_4(x))^2 \,\mathrm{d}x}}, \dots \right\}$$

je ortonormálny.

✓ Poznámka: analogicky sa zavádzajú pojmi ortogonálny systém funkcií a ortonormálny systém funkcií aj na nekonečnom intervale, napríklad: $(-\infty, \infty)$ alebo $[0, \infty)$ a pod. V takejto situácii integráli vystupujúce v definíciách musia existovať, čo je dodatočná podmienka k podmienke spojitosti po častiach. (V prípade konečného uzavretého intervalu spojitosť po častiach funkcií f a g zaručuje existenciu integrálu $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.)

✠ **ortogonálnosť trigonometrického systému funkcií**: uvažujeme systém funkcií

$$\left\{1, \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \dots\right\}, \tag{47}$$

kde $l > 0$ ($2l$ je perióda spoločná všetkým týmto funkciám). Tvrdíme, že systém (47) je ortogonálny na intervale $[-l, l]$.

✓ Dôkaz: v prvom rade vidíme, že integrál z kvadrátu každej z uvedených funkcií je kladný. Teraz ukážeme priamim výpočtom, že integrály zo všetkých zmiešaných súčinov funkcií tohoto systému v intervale $[-l, l]$ sú naozaj nulové:

* nech $k \in \mathbb{N}$, potom:

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \mathrm{d}x = \left|\frac{k\pi x}{l} = y,\ \mathrm{d}x = \frac{l}{k\pi}\mathrm{d}y\right| = \frac{l}{k\pi}\int_{-k\pi}^{k\pi} \sin(y)\mathrm{d}y = -\frac{l}{k\pi}\left[\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)\right] = 0.$$

a

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \mathrm{d}x = \left|\frac{k\pi x}{l} = y,\ \mathrm{d}x = \frac{l}{k\pi}\mathrm{d}y\right| = \frac{l}{k\pi}\int_{-k\pi}^{k\pi} \cos(y)\mathrm{d}y = \frac{l}{k\pi}\left[\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right] = 0.$$

* teraz využijeme stredoškolské formule:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

ktoré keď sčítame resp. odčítame dostaneme

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right].$$

Nech teraz $i \neq j$ sú prirodzené čísla, potom s pomocou týchto formúl dostávame nasledovné dve identity:

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\left(\frac{(i-j)\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{(i+j)\pi x}{l}\right)\right]\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(i-j)\pi}\sin\left(\frac{(i-j)\pi x}{l}\right) - \frac{l}{(i+j)\pi}\sin\left(\frac{(i+j)\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0,$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{j\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\left(\frac{(i+j)\pi x}{l}\right) + \cos\left(\frac{(i-j)\pi x}{l}\right)\right]\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(i+j)\pi}\sin\left(\frac{(i+j)\pi x}{l}\right) + \frac{l}{(i-j)\pi}\sin\left(\frac{(i-j)\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0.$$

* a pomocou ďaľších jednoduchých vzorčekov:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

máme, že

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$

Preto pre $i \neq j$ dve prirodzené čísla máme

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{j\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\sin\left(\frac{(i+j)\pi x}{l}\right)+\sin\left(\frac{(i-j)\pi x}{l}\right)\right]\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2}\left[-\frac{l}{(i+j)\pi}\cos\left(\frac{(i+j)\pi x}{l}\right)-\frac{l}{(i-j)\pi}\cos\left(\frac{(i-j)\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0.$$

V prípade $i = j$, i prirodzené číslo, máme ešte jednoduchšie

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\sin\left(\frac{2i\pi x}{l}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{-l}{2i\pi}\left[\cos\left(\frac{2i\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0.$$

Tým zakončujeme dôkaz ortogonálnosti trigonometrického systému funkcií. $\square$

3.1 Nájdite koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \omega$ tak aby systém funkcií

$$\left\{e^{-x}, e^{-x}(x+\alpha), e^{-x}(x^2+\beta x+\gamma), e^{-x}(x^3+\delta x^2+\eta x+\omega)\right\}$$

bol ortogonálny na $[0,\infty)$. Potom získaný ortogonálny systém prerobte na ortonormálny.
Riešenie: Podmienka ortogonality znamená, že integrál (od 0 do ∞) zo súčinu každých dvoch rôznych funkcií zadaného systému je nula - to dá isté podmienky na koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \omega$. Počítajme:

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{-x}(x+\alpha)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{4}(1+2\alpha) = 0$$
$$\int_0^\infty e^{-x}e^{-x}(x^2+\beta x+\gamma)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{4}(1+\beta+2\gamma) = 0$$
$$\int_0^\infty e^{-x}e^{-x}(x^3+\delta x^2+\eta x+\omega)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{8}(3+2\delta+2\eta+4\omega) = 0$$
$$\int_0^\infty e^{-x}(x+\alpha)e^{-x}(x^2+\beta x+\gamma)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{8}[3+2\beta+2\gamma+2\alpha(1+\beta+2\gamma)] = 0$$
$$\int_0^\infty e^{-x}(x+\alpha)e^{-x}(x^3+\delta x^2+\eta x+\omega)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{8}[3\delta+2(3+\eta+\omega)+\alpha(3+2\delta+2\eta+4\omega)] = 0$$
$$\int_0^\infty e^{-x}(x^2+\beta x+\gamma)e^{-x}(x^3+\delta x^2+\eta x+\omega)\mathrm{d}x = \cdots =$$
$$\frac{1}{8}[3(5+\gamma+2\delta+\eta)+2\omega+2\gamma(\delta+\eta+2\omega)+\beta(3\delta+6+2\eta+2\omega)] = 0.$$

Z prvej druhej a štvrtej rovnice vypočítame jednoducho čísla α, β a γ s výsledkom:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = -2 \qquad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Zvyšné tri rovnice sa upravia na sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2\delta+2\eta+4\omega &= -3 \\ 3\delta+2\eta+2\omega &= -6 \\ 6\delta+3\eta+2\omega &= -15, \end{aligned}$$

ktorej riešenie je

$$\delta = -\frac{9}{2} \qquad \eta = \frac{9}{2} \qquad \omega = -\frac{3}{4}.$$

Takže náš ortogonálny systém funkcií je

$$\left\{e^{-x}, e^{-x}\left(x-\frac{1}{2}\right), e^{-x}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right), e^{-x}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Teraz tento systém nanormujeme podľa predpisu:

$$f(x) \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x}}.$$

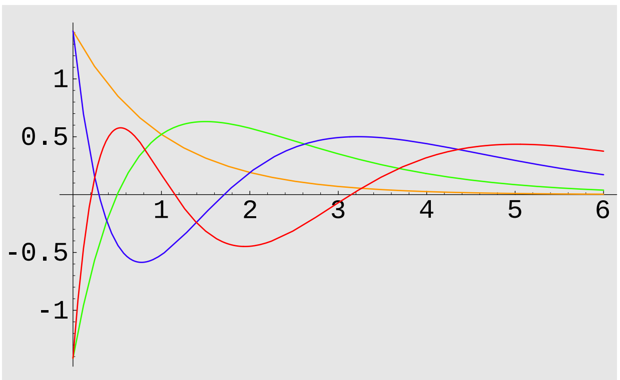
Keďže:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\\
&\int_0^\infty e^{-2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\\
&\int_0^\infty e^{-2x}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\\
&\int_0^\infty e^{-2x}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{3}{4}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{9}{32},
\end{aligned}$$

tak hľadaný ortonormálny systém funkcií je

$$\left\{\sqrt{2}e^{-x}, 2\sqrt{2}e^{-x}\left(x-\frac{1}{2}\right), 2\sqrt{2}e^{-x}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right), \frac{4\sqrt{2}}{3}e^{-x}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{3}{4}\right)\right\}. \tag{48}$$

Funkcie sustému (48) sú zobrazené na obrázku 25.



Obr. 25:

3.2 Prerobte ortogonálny trigonometrický systém (47) na ortonormálny.

3.3 Nájdite čísla α, β, γ tak aby systém funkcií:

$$\{1, x+\alpha, x^2+\beta x+\gamma\}$$

bol ortogonálny na intervale $[-1, 1]$. Potom získaný ortogonálny systém prerobte na ortonormálny.

3.4 Nájdite čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak aby systém funkcií:

$$\{1, x+\alpha, x^2+\beta x+\gamma\}$$

bol ortogonálny na intervale $[0, 1]$. Potom získaný ortogonálny systém prerobte na ortonormálny.

3.2 Gramm-Schmidt ortogonalizácia

✠ **priemet jedného vektora do smeru druhého vektora**: majme dva nenulové vektory u a v a medzi nimi skalárny súčin (u, v). Úloha znie: nájsť priemet vektora v do smeru vektora u. Smer vektora u je určený jednotkovým vektorom

$$n_u = \frac{u}{\sqrt{(u,u)}} \equiv \frac{u}{||u||},$$

kde sme označili dĺžku (veľkosť) vektora (u): $||u|| = \sqrt{(u,u)}$. Ak α je uhol medzi vektormi u a v (ten istý uhol je samozrejme aj medzi vektormi n_u a v), tak potom

$$(n_u, v) = ||n_u||\, ||v|| \cos(\alpha) = ||v|| \cos(\alpha).$$

Preto priemet $v_{||}$ vektora v do smeru vektora u je daný vzťahom:

$$v_{||} = (n_u, v) n_u = (u, v)\frac{u}{||u||^2} = (u, v)\frac{u}{(u,u)}. \tag{49}$$

Vektor v možno rozložiť na súčet: jeho priemetu do smeru u a zložky kolmej na u

$$v = v_{||} + v_{\perp},$$

kde $v_{||}$ je dané vzťahom (49), takže

$$v_{\perp} = v - (u, v)\frac{u}{(u,u)}. \tag{50}$$

✠ **princíp Gramm-Schmidt ortogonalizácie**: majme n-lineárne nezávislých vektorov $\{u_i\}_{i=1}^n$ (či už prvkov $\mathbb{R}^m$ alebo funkcií) medzi ktorými máme definovaný skalárny súčin (u_i, u_j). Nasledovným spôsobom, založeným na vzťahu (50), sme schopný vyrobiť zo zadaných vektorov $u_1, u_2, \dots u_n$ ortogonálne vektory $v_1, v_2, \dots v_n$:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - (v_1, u_2)\frac{v_1}{(v_1, v_1)} \\
v_3 &= u_3 - \left[(v_1, u_3)\frac{v_1}{(v_1, v_1)} + (v_2, u_3)\frac{v_2}{(v_2, v_2)}\right] \\
v_4 &= u_4 - \left[(v_1, u_4)\frac{v_1}{(v_1, v_1)} + (v_2, u_4)\frac{v_2}{(v_2, v_2)} + (v_3, u_4)\frac{v_3}{(v_3, v_3)}\right] \\
&\dots \\
v_k &= u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_i, u_k)\frac{v_i}{(v_i, v_i)} \\
&\dots \\
v_n &= u_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_i, u_n)\frac{v_i}{(v_i, v_i)}.
\end{aligned}$$

Samozrejme, teraz namiesto vektorov $v_1, v_2, \dots v_n$ môžeme vziať vektory:

$$\left\{ \frac{v_1}{\sqrt{(v_1, v_1)}}, \frac{v_2}{\sqrt{(v_2, v_2)}}, \dots, \frac{v_n}{\sqrt{(v_n, v_n)}} \right\},$$

ktoré tvoria už ortonormálny systém.

✓ Poznámka: ak zadaný systém vektorov $u_1, \ldots, u_n$ nie je lineárne nezávislý, tak môžeme použiť Gramm-Schmidt ortogonalizáciu bezo zmeny, akurát niektoré z vektorov $v_1, \ldots, v_n$ vyjdú nulové a z tých, samozrejme, nejde urobiť vektory jednotkovej dĺžky!

3.5 Ortogonalizujte Gramm-Schmidtovou metódou vektory:

$$u_1 = (1, 0, -1, 1, 1) \qquad u_2 = (0, 0, -2, 1, 1) \qquad u_3 = (1, 0, 0, 0, -1) \qquad u_4 = (0, 1, 2, -2, 1).$$

Riešenie: podľa návodu vyššie máme

$$\begin{aligned}
&v_1 = (1, 0, -1, 1, 1)\\
&v_2 = (0, 0, -2, 1, 1) - 4\frac{(1, 0, -1, 1, 1)}{4} = (-1, 0, -1, 0, 0)\\
&v_3 = (1, 0, 0, 0, -1) - 0\frac{(1, 0, -1, 1, 1)}{4} - (-1)\frac{(-1, 0, -1, 0, 0)}{2} = (1/2, 0, -1/2, 0, -1)\\
&v_4 = (0, 1, 2, -2, 1) - (-3)\frac{(1, 0, -1, 1, 1)}{4} - (-2)\frac{(-1, 0, -1, 0, 0)}{2} - (-2)\frac{(1/2, 0, -1/2, 0, -1)}{\frac{3}{2}} =\\
&\frac{1}{12}(5, 12, -5, -15, 5).
\end{aligned}$$

3.6 Ortogonalizujte Gramm-Schmidtovou metódou funkcie:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3,\ f_4(x) = x^4,\ f_5(x) = x^5$$

definované na intervale $[0, 1]$.
Riešenie: značme ortogonálne funkcie, ktoré sa budeme snažiť vypočítať, ako g_0, g_1, g_2, g_3, g_4. Podľa Gramm-Schmidtovej metódy - s využitím toho, že skalárny súčin funkcie F s funkciou G je

$$(F, G) = \int_0^\infty F(x)G(x)\mathrm{d}x,$$

máme postupne:

$$g_0(x) = f_0(x) = 1.$$

Teraz

$$\begin{aligned}
(g_0, g_0) &= \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1,\\
(f_1, g_0) &= \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

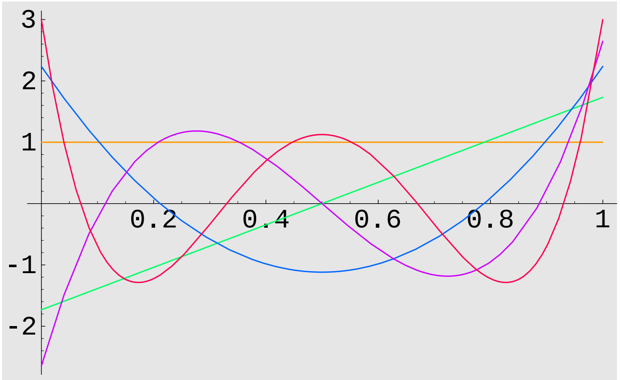
Takže

$$g_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1, g_0)}{(g_0, g_0)}g_0(x) = x - \frac{1}{2}.$$

V ďaľšom kroku máme:

$$\begin{aligned}
(g_1, g_1) &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12},\\
(f_2, g_0) &= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3},\\
(f_2, g_1) &= \int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

čiže
$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{(f_2, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0(x) - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1(x) = x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$
Tretí krok:
$$\begin{aligned}
(g_2, g_2) &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{180},\\
(f_3, g_0) &= \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4},\\
(f_3, g_1) &= \int_0^1 x^3 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40},\\
(f_3, g_2) &= \int_0^1 x^3 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$
To znamená, že
$$g_3(x) = f_3(x) - \frac{(f_3, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0(x) - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1(x) - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2(x) = x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) =$$
$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}.$$
No a v štvrtom kroku budeme potrebovať hodnoty:
$$\begin{aligned}
(g_3, g_3) &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2800},\\
(f_4, g_0) &= \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{5},\\
(f_4, g_1) &= \int_0^1 x^4 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15},\\
(f_4, g_2) &= \int_0^1 x^4 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{105},\\
(f_4, g_3) &= \int_0^1 x^4 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{1400},
\end{aligned}$$
podľa ktorých máme
$$g_4(x) = f_4(x) - \frac{(f_4, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0(x) - \frac{(f_4, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1(x) - \frac{(f_4, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2(x) - \frac{(f_4, g_3)}{(g_3, g_3)} g_3(x) =$$
$$x^4 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{12}{7}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) - 2\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right) = x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{70}.$$
Tým sme našli ortogonálne polynómi $g_0, \ldots, g_4$, aby sme ich mohli normalizovať dopočítame ešte
$$(g_4, g_4) = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{70}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{44100}.$$
Takže systém polynómov:
$$\left\{1,\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right),\ 20\sqrt{7}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right),\ 210\left(x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{70}\right)\right\} \tag{51}$$
je ortonormálny na $[0, 1]$. Grafy funkcií zo systému (51) sú na obrázku 26.



Obr. 26:

3.7 Ortogonalizujte Gramm-Schmidtovou metódou funkcie:

$$f_0(x) = e^{-\frac{x}{2}},\ f_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}x,\ f_2(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^2 f_3(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^3,\ f_4(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^4$$

definované na intervale $[0, \infty)$.
Riešenie: označme ortogonálne funkcie, ktoré sa budeme snažiť vypočítať, ako $g_0, g_1, \ldots, g_4$. Podľa Gramm-Schmidtovej metódy - s využitím toho, že skalárny súčin funkcie F s funkciou G je

$$(F, G) = \int_0^\infty F(x)G(x)\mathrm{d}x,$$

máme postupne:[7]

$$g_0(x) = f_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$(g_0, g_0) = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1,$$
$$(g_0, f_1) = \int_0^\infty e^{-x}x\mathrm{d}x = 1,$$

takže

$$g_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1, g_0)}{(g_0, g_0)}g_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}x - e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}(x-1).$$

Ďalej budeme potrebovať hodnoty:

$$(g_1, g_1) = \int_0^\infty e^{-x}(x-1)^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}(x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 2 - 2 + 1 = 1,$$
$$(g_0, f_2) = \int_0^\infty e^{-x}x^2\mathrm{d}x = 2,$$
$$(g_1, f_2) = \int_0^\infty e^{-x}(x-1)x^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}(x^3 - x^2)\mathrm{d}x = 6 - 2 = 4,$$

pomocou ktorých (a predchádzajúcich) máme

$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{(f_2, g_0)}{(g_0, g_0)}g_0(x) - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}g_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^2 - \frac{2}{1}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{4}{1}e^{-\frac{x}{2}}(x-1) = e^{-\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 2).$$

[7] pri týchto výpočtoch je užitočné si uvedomiť, že pre každé prirodzené číslo q platí jednoduchá formulka

$$\int_0^\infty e^{-x}x^q\mathrm{d}x = q!\ .$$

Ďalej pomocou:

$$(f_3,g_0)=\int_0^\infty e^{-x}x^3\mathrm{d}x=6,$$
$$(f_3,g_1)=\int_0^\infty e^{-x}x^3(x-1)\mathrm{d}x=24-6=18,$$
$$(f_3,g_2)=\int_0^\infty e^{-x}x^3(x^2-4x+2)\mathrm{d}x=36,$$
$$(g_2,g_2)=\int_0^\infty e^{-x}(x^2-4x+2)^2\mathrm{d}x=4$$

máme

$$g_3(x)=f_3(x)-\frac{(f_3,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0(x)-\frac{(f_3,g_1)}{(g_1,g_1)}g_1(x)-\frac{(f_3,g_2)}{(g_2,g_2)}g_2(x)=e^{-\frac{x}{x}}\left[x^3-6-18(x-1)-9(x^2-4x+2)\right]=$$
$$e^{-\frac{x}{2}}\left(x^3-9x^2+18x-6\right).$$

No a nakoniec ešte:

$$(f_4,g_0)=\int_0^\infty e^{-x}x^4\mathrm{d}x=24,$$
$$(f_4,g_1)=\int_0^\infty e^{-x}x^4(x-1)\mathrm{d}x=96,$$
$$(f_4,g_2)=\int_0^\infty e^{-x}x^4(x^2-4x+2)\mathrm{d}x=288,$$
$$(f_4,g_3)=\int_0^\infty e^{-x}x^4(x^3-9x^2+18x-6)\mathrm{d}x=576,$$
$$(g_3,g_3)=\int_0^\infty e^{-x}(x^3-9x^2+18x-6)^2\mathrm{d}x=36,$$

takže

$$g_4(x)=f_4(x)-\frac{(f_4,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0(x)-\frac{(f_4,g_1)}{(g_1,g_1)}g_1(x)-\frac{(f_4,g_2)}{(g_2,g_2)}g_2(x)-\frac{(f_4,g_3)}{(g_3,g_3)}g_3(x)=$$
$$e^{-\frac{x}{2}}\left[x^4-24-96(x-1)-72(x^2-4x+2)-16(x^3-9x^2+18x-6)\right]=e^{-\frac{x}{2}}\left[x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right].$$

Takže sme vykonali ortogonalizáciu zadaného systému funkcií nájdením funkcií g_0, g_1, g_2, g_3, g_4. Ak ešte vypočítame

$$(g_4,g_4)=\int_0^\infty e^{-x}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)^2\mathrm{d}=576,$$

tak môžeme normovať ortogonálne funkcie $g_0,\ldots,g_4$ a dostávame ortonormálny systém:

$$\left\{e^{-\frac{x}{2}}, e^{-\frac{x}{2}}(x-1), \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x^2-4x+2), \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}}(x^3-9x^2+18x-6), \frac{1}{24}e^{-\frac{x}{2}}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)\right\}. \tag{52}$$

Funkcie tohoto systému sú zobrazené na obrázku 27.

3.8 Nájdite priemet vektora $v=(1,1,-1,0,1)$ do smeru vektora $u=(0,2,0,1,2)$.

3.9 Nájdite rozklad vektora $v=(1,1,0,-1,2)$ na vektor kolmý a vektor rovnobežný s vektorom $u=(2,-1,1,0,-2)$.

3.10 Ortogonalizujte Gramm-Schmidtovou metódou polynómi

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2,\ f_3(x)=x^3,\ f_4(x)=x^4,\ f_5(x)=x^5$$

definované na intervale $[-1,1]$.

Obr. 27: Grafy funkcií systému (52) - tieto funkcie sú (až na faktor $e^{-x/2}$) tzv. Laguerreove polynómy. Vyjadrujú sa cez ne, napríklad, radiálne časti vlnových funkcií stacionárnych stavov elektrónu v atóme vodíka. Tieto funkcie sa podobajú na tie, ktoré sme skúmali v predchádzajúcom odstavci a ktoré sú zobrazené na grafe 25.

3.3 Fourierov rad

✠ **definícia fourierových koeficientov**: uvažujme funkciu f definovanú na intervale $[-l, l]$ $(l > 0)$, ktorá má po častiach spojitú prvú deriváciu. Fourierovými koeficientami tejto funkcie sa nazývajú čísla

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots \quad . \end{aligned} \tag{53}$$

✓ (Dôsledok Riemannovej lemmy): platí, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

✓ Fourierove koeficienty párnej a nepárnej funkcie: nech funkcia f je

∗ párna, potom

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad b_n = 0$$

∗ nepárna, potom

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad a_n = 0.$$

✠ **definícia fourierovho radu**: fourierovým radom funkcie f (zavedenej vyššie) sa nazýva (funkcionálny) rad:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]. \tag{54}$$

✠ **bodová konvergencia fourierovho radu**: fourierov rad (54) funkcie (s po častiach spojitou prvou deriváciou v intervale $[-l, l]$) konverguje v každom bode intervalu $[-l, l]$ a pre jeho súčet platí:

✓ ak f je spojitá v $x_0 \in [-l, l]$, tak

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)\right] = f(x_0), \tag{55}$$

✓ ak f má v x_0 bod nespojitosti (len prvého druhu) tak

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)\right]=\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}, \tag{56}$$

kde význam použitích symbolov je:

$$\begin{aligned} f(x_0+0) &= \lim_{x\to x_0^+} f(x), \\ f(x_0-0) &= \lim_{x\to x_0^-} f(x). \end{aligned}$$

∗ samozrejme, vzťah (55) je špeciálnym prípadom vzťahu (56).

✠ **minimálna vlastnosť fourierových koeficientov**: uvažujme tzv. *trigonometrický polynóm* stupňa N:

$$T_N(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\beta_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] \tag{57}$$

a funkciu (zase definovanú na intervale $[-l,l]$ s po častiach spojitou prvou deriváciou) f. Čísla $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N,\beta_1,$ sú ľubovoľné. Zaveďme *strednú kvadratickú odchýlku funkcie f od trigonometrického polynómu* (57) vzťahom

$$\Delta^2(f,T_N)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[f(x)-T_N(x)\right]^2\mathrm{d}x. \tag{58}$$

Toto $\Delta^2(f,T_N)$ má zmysel bežnej vzdialenosti. Je isto zaujímavé sa pýtať pre aký výber čísel $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N$ je táto vzdialenosť minimálna. Odpoveď je: práve vtedy keď čísla $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N$ sú zhodné s fourierovými koeficientami (53) $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_N,b_1,b_2,\ldots,b_N$ funkcie f.

Túto vlastnosť Fourierových koeficientov aj dokážeme. Uvažujme funkciu Δ^2 tak ako je uvedená vyššie. Máme dokázať, že nadobúda minimum vtedy a len vtedy keď koeficienty $\alpha_0,\ldots,\beta_n$ sú rovné Fourierovým koeficientom funkcie f. Nutnou podmienkou na extrém diferencovateľnej funkcie je, že všetky jej parciálne derivácie sú rovné nule (funkcia má v bode extrému nulový gradient). Vypočítame vzorovo jednu konkrétnu deriváciu:

$$\frac{\partial\Delta^2}{\partial\alpha_1}=-\frac{2}{l}\int_{-l}^{l}[f(x)-T_N(x)]\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{l}\left\{\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x-\int_{-l}^{l}T_N(x)\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\right\}=$$
$$-\frac{2}{l}\left\{la_1-l\alpha_1\right\}=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 a_1.$$

Rovnako samozrejme ukážeme, že:

$$\alpha_0=a_0,\ldots,\beta_n=b_n.$$

Treba ešte ukázať, že v nájdenom bode sa dosahuje minimum funkcie Δ^2. To ľahko zistíme, na základe toho, že:

$$\frac{\partial^2\Delta^2}{\partial\alpha_0^2}>0,\ \frac{\partial^2\Delta^2}{\partial\alpha_i^2}>0,\ \frac{\partial^2\Delta^2}{\partial\beta_i^2}>0,\quad i=1,2,3,\ldots,n\ ,$$

a zmiešané parciálne derivácie (všetky) funkcie Δ^2 sú nulové (zase kvôli ortogonálnosti trigonometrického systému funkcií).

✠ **Parsevalova identita**: medzi funkciou f a jej fourierovými koeficientami 53 platí nasledovný zaujímavý vzťah:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2 + b_n^2\right]. \tag{59}$$

3.11 Nájdite rozvoj funkcie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in [-\pi, 0) \\ 1 & \text{pre} \quad x \in [0, \pi] \end{cases} \tag{60}$$

do Fourierovho radu.

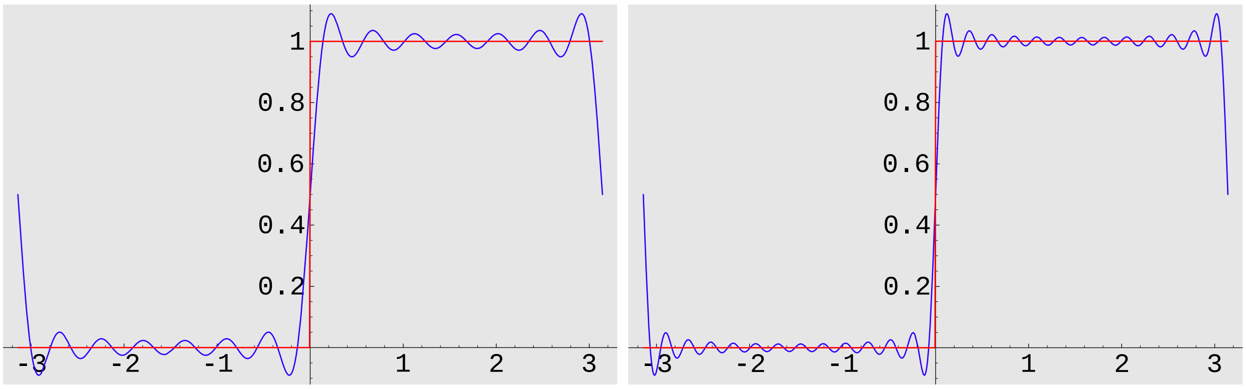
Riešenie: podľa (53) vypočítame Fourierove koeficienty zadanej funkcie. V našom prípade je $l = \pi$ a teda:[8]

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x = 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{1}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Takže Fourierov rad zadanej funkcie je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin(nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}. \tag{61}$$

Pre názornosť niekoľko čiastočných súčtov tohoto radu je zobrazených na obrázku 28.



Obr. 28: Vľavo: 6-ty čiastočný súčet radu (61) (6-ty v zmysle sumačného indexu k), v pravo: 12-ty čiastočný súčet v porovnaní so súčtom celého radu, t.j. funkciou (60).

Výsledky, ktoré sme týmto získali môžeme ešte použiť aj nasledovne: napíšeme si Parsevalovu identitu (59) v našom prípade

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)^2}{\pi^2 n^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

alebo inak

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

čo je celkom zaujímavá sumačná formulka.

[8] vo výpočte využijeme to, že pre prirodzené číslo n platí

$$\cos(n\pi) = (-1)^n.$$

3.12 Nájdite rozklad funkcie

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1] \tag{62}$$

do Fourierovho radu.

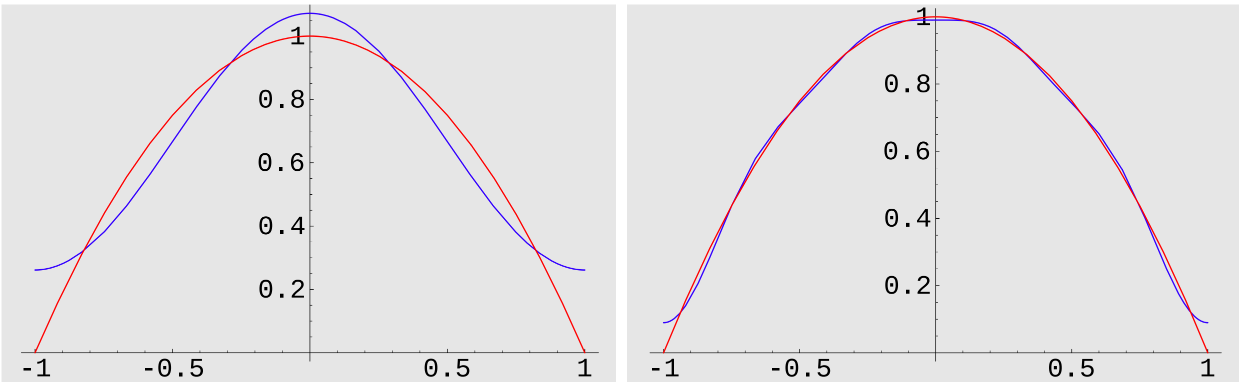
Riešenie: v tomto prípade máme $l = 1$ a podľa (53) máme Fourierove koeficienty (funkcia je párna, preto všetky b_n sú nulové!)

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}, \\ a_n &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x = \cdots = -\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Takže Fourierov rad funkcie (62) je

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x). \tag{63}$$

Pre názornosť na obrázku 29 sme zobrazili dva čiastočné súčty radu (63).



Obr. 29: Vľavo: 1-vý čiastočný súčet radu (63), v pravo: 4-tý čiastočný súčet v porovnaní so súčtom celého radu, t.j. funkciou (62). Rýchlosť konvergencie tohoto radu je "úchvatná" .

Aplikáciou Parsevalovej identity (59) v tejto situácii dostaneme ďalšiu zaujímavú sumačnú formulku, menovite

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{8}{9} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

3.13 Nájdite rozklad funkcie:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1) & x \in [-1, -1/2) \\ 1 & x \in [-1/2, 1/2] \\ 2(-x+1) & x \in (1/2, 1] \end{cases} \tag{64}$$

do Fourierovho radu.

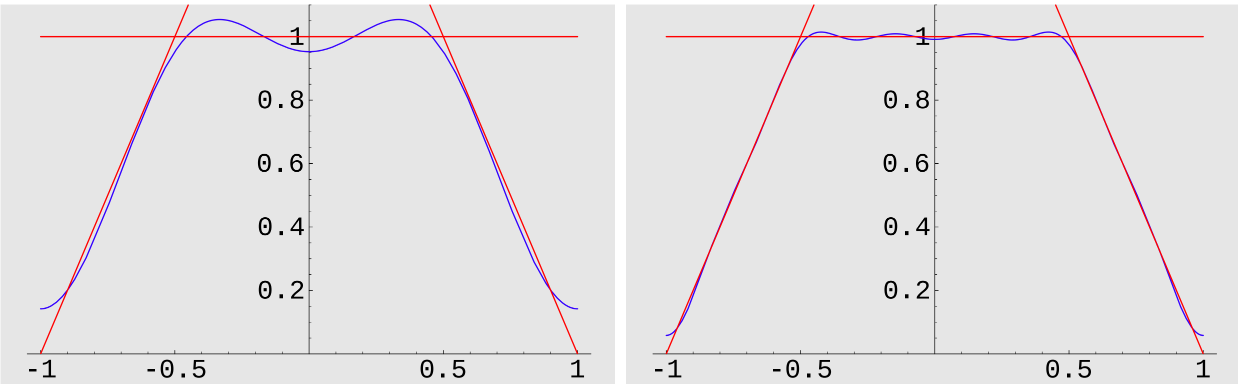
Riešenie: v tomto prípade je $l = 1$, ďalej funkcia je párna a preto $b_n = 0$ a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{-1/2} 2(x+1)\mathrm{d}x + \int_{-1/2}^{1/2} 1\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} 2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}, \\ a_n &= \int_{-1}^{-1/2} 2(x+1)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x + \int_{-1/2}^{1/2} \cos(n\pi x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} 2(1-x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x = \\ &\quad \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]. \end{aligned}$$

Takže Fourierov rad uvažovanej funkcie je

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right] \cos(n\pi x). \tag{65}$$

Porovnanie čiastočných súčtov tohoto radu s funkciou (64) je na obrázku 30.



Obr. 30: Druhý čiastočný súčet (vľavo) a šiesty čiastočný súčet radu (65) v porovnaní s funkciou (64).

3.14 Nájdite rozvoj nepárneho predĺženia funkcie:

$$f(x) = x(1-x), \quad x \in [0,1] \tag{66}$$

na interval $[-1,1]$ do Fourierovho radu.

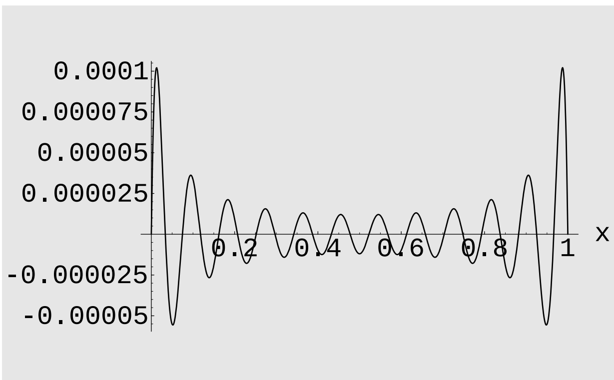
Riešenie: jedná sa o rozvoj nepárnej funkcie, preto: $a_i = 0, \ i = 0,1,\dots,n$ a sínusové koeficienty sú:

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^3}(1-(-1)^n).$$

Vzhľadom na spojitosť nepárneho predĺženia uvedenej funkcie máme teda:

$$x(1-x) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^3}, \ \forall x \in [-1,1]. \tag{67}$$

Rozdiel medzi funkciou (66) a 10-tim čiastočným súčtom radu (67) je znázornený na grafe 31.



Obr. 31:

3.15 Nájdite rozvoj funkcie:

$$f(x) = (1 - x^2)(x^2 + \frac{1}{16}) \tag{68}$$

do Fourierovho radu v intervale $[-1, 1]$.

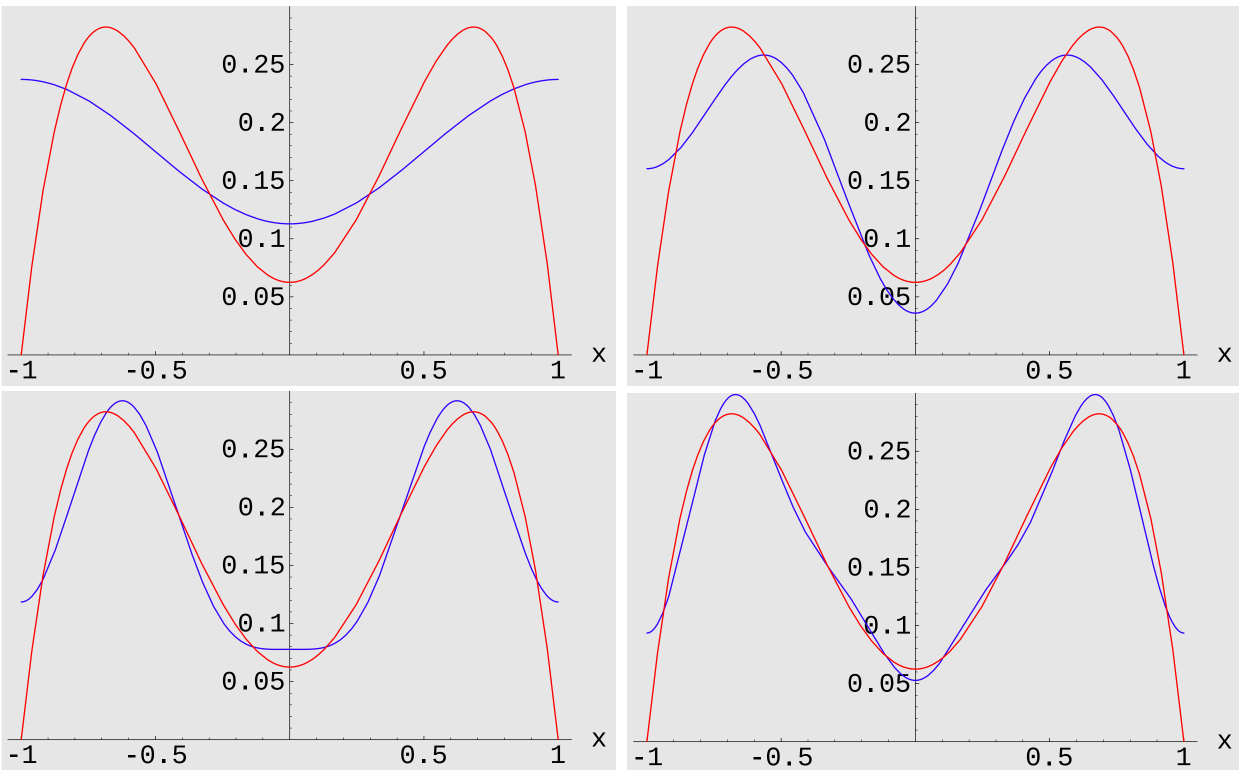
Riešenie: jedná sa zjavne o funkciu párnu a preto všetky sínusové koeficienty (b_n) sú rovné nule. Máme:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\int_0^1 (1 - x^2)(x^2 + \frac{1}{16})\mathrm{d}x = \frac{7}{20}, \\ a_n &= 2\int_0^1 (1 - x^2)(x^2 + \frac{1}{2})\cos(n\pi x)\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(192 - 17n^2\pi^2)}{8\pi^4 n^4}. \end{aligned}$$

Takže, vzhľadom na spojitosť funkcie (68) platí v intervale $[-1, 1]$ rovnosť:

$$(1 - x^2)(x^2 + \frac{1}{2}) = \frac{7}{15} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(192 - 17n^2\pi^2)}{4\pi^4 n^4} \cos(n\pi x). \tag{69}$$

Porovnanie funkcie (68) a niektorých čiastočných súčtov jej fourierovho radu (pravá strana (69) je na sérii grafov 32.



Obr. 32: Funkcia (68) a (zľava hore doprava a dole) 1-,2-,3- a 4-tý čiastočný súšet jej fourierovho radu (69). Vidímeže k správnemu popísaniu priebehu funkcie pri krajných bodoch ± 1 treba viac členov radu.

3.16 Rozložte funkciu

$$f(x) = \sin^2(x)$$

do Fourierovho rada v intervale: (a) $[-\pi, \pi]$; (b) $[-3\pi, 3\pi]$; (c) $[-\pi/2, \pi/2]$; (d) $[-\pi/4, \pi/4]$.

Riešenie: ujasnime si, že platí:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Preto máme:

(a) v intervale $[-\pi,\pi]$ očakávame rad (jedná sa o párnu funkciu preto sínusové koeficienty sú nulové!):

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx).$$

Takže vidíme, že nenulové sú práve koeficienty:

$$a_0=1,\ a_2=-\frac{1}{2}.$$

(b) v intervale $[-3\pi,3\pi]$ očakávame rad:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{nx}{3}\right).$$

Takže vidíme, že nenulové sú práve koeficienty:

$$a_0=1,\ a_6=-\frac{1}{2}.$$

(c) v intervale $[-\pi/2,\pi/2]$ očakávame rad:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(2nx\right).$$

Takže vidíme, že nenulové sú práve koeficienty:

$$a_0=1,\ a_1=-\frac{1}{2}.$$

(d) v intervale $[-\pi/4,\pi/4]$ očakávame rad:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(4nx\right).$$

Takže vidíme, že náš rozklad funkcie $\sin^2(x)$ sa na tento rad previesť nedá - musíme sa vrátiť k integrálnym vzorcom a vypočítať Fourierove koeficienty všeobecnou metódou:

$$a_0=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi-2}{\pi},$$

$$a_2=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin^2(x)\cos(2x)\mathrm{d}x=\frac{4-\pi}{2\pi},$$

a

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin^2(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\frac{1}{n^2-4}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right),\ n=1,3,4,5,\ldots.$$

Vidíme teda, že nekonečne veľa Fourierových koeficientov je nenulových.

3.17 Rozložte v intervale $x\in[-\pi,\pi]$ do Fourierovho radu funkciu:

$$f(x)=\cos(\omega x), \tag{70}$$

kde ω je reálny parameter.

Riešenie: jedná sa o párnu funkciu, preto sínusové koeficienty sú nuly a:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\omega x)\mathrm{d}x = 2\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\omega x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\cos[(n+\omega)x] + \cos[(\omega-n)x]\}\mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi\omega+n\pi)}{\omega+n} + \frac{\sin(\pi\omega-n\pi)}{\omega-n}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi}\frac{\omega\sin(\pi\omega)}{\omega^2-n^2}.
\end{aligned}$$

Takže máme, že pre $x \in [-\pi,\pi]$ platí rovnosť:

$$\cos(\omega x) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi}\frac{\omega\sin(\pi\omega)}{\omega^2-n^2}\cos(nx). \tag{71}$$

Túto rovnosť - Fourierov rad funkcie 70 - možno upraviť nasledovným veľmi zaujímavým spôsobom:

$$\cos(\omega x) = \frac{2\omega\sin(\pi\omega)}{\pi}\left[\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\cos(x)}{1^2-\omega^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2-\omega^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2-\omega^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2-\omega^2} + \dots\right].$$

Podelením oboch strán funkciou $\sin(\pi\omega)$ máme:

$$\cot(\omega x) = \frac{2\omega}{\pi}\left[\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\cos(x)}{1^2-\omega^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2-\omega^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2-\omega^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2-\omega^2} + \dots\right].$$

Finálne poslednú rovnosť vyčíslime v bode $x = \pi$ a dostáva tzv. rozklad funkcie kotangens na *parciálne zlomky*:

$$\cot(\pi\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\omega} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\omega}{n^2-\omega^2}\right]. \tag{72}$$

Prípadne môžeme ešte vykonať nasledovú substitúciu:

$$z = \pi\omega$$

a máme:

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{\pi^2 n^2 - z^2}. \tag{73}$$

Definičným oborom tohoto vzťahu je zjavne množina:

$$\mathbb{R}\setminus\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}.$$

Vzťah (73) možno použiť na rôzne zaujímavosti. Jednu si ukážeme. Vzťah zderivujeme - rad derivujeme člen po člene, čo ide urobiť v každom z kde je súčet definovaný. Dostávame:

$$-\frac{1}{\sin^2(z)} = -\frac{1}{z^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2+z^2}{(n\pi^2-z^2)^2}.$$

Teraz použijeme krátky vzťah:

$$2\frac{n^2\pi^2+z^2}{(n\pi^2-z^2)^2} = \frac{1}{(z+n\pi)^2} + \frac{1}{(z-n\pi)^2},$$

a máme fináne (po zmene znamienka v celej rovnici):

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z+n\pi)^2} + \frac{1}{(z-n\pi)^2}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k\pi)^2}. \tag{74}$$

3.18 Rozviňte do Fourierovho radu v intervale $[-\pi, \pi]$ funkciu

$$f(x) = x\sin(x). \tag{75}$$

Riešenie: funkcia (75) je párna a preto všetky sínusové koeficienty sú nulové a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = 2, \\ a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}. \end{aligned}$$

Takže pre každé $x \in [-\pi, \pi]$ platí rovnosť:

$$x\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx). \tag{76}$$

Zapíšeme pre tento prípad Parsevalovu identitu:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x\sin(x))^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2-3}{6} = 2 + \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n^2-1)^2}.$$

Predchádzajúcu rovnosť ešte prepíšeme do tvaru:

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{11}{4} + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}.$$

3.19 Nájdite rozvoj zadaných funkcií do ich Fourierových radov. Zapíšte v zadaných prípadoch Parsevalovu identitu.

a) $f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi]$ *b)* $f(x) = x^3,\ x \in [-1, 1]$ *c)* $f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$

d) $f(x) = \cos^2(x), x \in [-\pi, \pi]$ *e)* $f(x) = \cos^2(x), x \in [-\pi/2, \pi/2]$ *f)* $f(x) = e^x,\ x \in [-1, 1]$

3.4 Fourierove rady - komplexná forma

✠ **eulerove vzorce**: pre každé reálne (komplexné) číslo x platí:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{77}$$

alebo aj inverzné vzťahy:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x). \tag{78}$$

✠ **komplexná forma fourierovho radu**: uvažujme funkciu f definovanú na intervale $[-l, l]$, komplexnou formou jej fourierovho radu sa nazýva rad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}}. \tag{79}$$

kde čísla c_n sú

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\mathrm{d}x. \tag{80}$$

✓ Zdvôvodnenie vzťahu (80): je založené na Eulerových vzťahoch a na formule pre Fourierove koeficienty (53) funkcie f. Totiž máme rozvoj f do jej Fourierovho radu:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2} + b_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i}\right] =$$
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} + c_{-k}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right],$$

takže pre $k > 0$ máme:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x \equiv \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{0}\mathrm{d}x\\
c_k &= \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} = \frac{1}{2l}\left\{\int_{-l}^{l} f(x)\left[\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\right\}\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\mathrm{d}x\\
c_{-k} &= \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} = \frac{1}{2l}\left\{\int_{-l}^{l} f(x)\left[\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\right\}\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{ik\pi x}{l}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

3.20 Nájdite rozvoj funkcie:

$$f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi]$$

do komplexnej formy Fourierovho radu v intervale $[-\pi, \pi]$.

Riešenie: V našom prípade je $l = \pi$ a podľa (80) máme

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0$$

a pre $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{ik}xe^{-ikx} + \frac{1}{ik}\int e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} =\\
-\frac{1}{2\pi ik}\left[\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}\right] &- \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ik}\right)^2\left[e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} =\\
-\frac{1}{ik}\cos(k\pi) + \frac{1}{2\pi k^2}\left[e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\right] &= -\frac{1}{ik}(-1)^k = \frac{i}{k}(-1)^k.
\end{aligned}$$

3.21 Rozložte do Fourierovho radu v intervale $[-\pi, \pi]$ (do komplexnej formy) funkciu:

$$f(x) = \sin^3(x). \tag{81}$$

Riešenie: využijeme priamo Eulerove vzorce a dostaneme Fourierove koeficienty uvedenj funkcie bez výpočtu integrálov:

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}). \tag{82}$$

Keď toto porovnáme so všeobecnou formou:

$$\sin^3(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

tak vidíme, že nenulové sú len koeficienty:

$$c_{-3} = \frac{1}{8i} \qquad c_{-1} = -\frac{3}{8i} \qquad c_1 = \frac{3}{8i} \qquad c_3 = -\frac{1}{8i}.$$

Malou úpravou vzťahu (82) dostaneme rýchle aj reálnu formu Fourierovho radu, menovite:

$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

3.5 Vlastné vektory a vlastné čísla samozdružených matíc

V tomto krátkom paragrafe uvedieme skutočnosti, ktoré dávajú do súvisu predchádzajúci text o ortogonálnych rozvojoch s úlohami o vlastných vektoroch samozdružených matíc. Budeme uvažovať, že máme vektorový priestor $\mathbb{C}^n$ - usporiadané n-tice komplexných čísel. V tomto máme skalárny súčin, ktorý vyhovuje podmienkam (u, v, w sú vektory, λ je komplexné číslo, λ^* znamená komplexné združenie čísla λ):

$$(u, v) = (v, u)^* \qquad\qquad (u, v + \lambda w) = (u, v) + \lambda(u, w).$$

Tieto dve vlastnosti spolu dávajú, že

$$(\lambda u, v) = \lambda^*(u, v).$$

Slovne sa hovorí, že skalárny súčin je

- lineárny v druhom argumente
- antilineárny v prvom argumente[9]

Nech teraz máme komplexnú maticu H typu $n \times n$, ktorá je **samozdružená**, t.j. platí

$$(H^T)^* = H.$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje v tvare

$$H^\dagger = H.$$

Samozdruženosť matice H znamená to isté ako, že pre každé 2 vektory u, v platí

$$(u, Hv) = (Hu, v).$$

Postavme teraz úlohu na vlastné čísla (ϵ) a vlastné vektory (v) matice H:

$$Hv = \epsilon v.$$

Ukážeme, že platia 2 podstatné tvrdenia o vlastných číslach a vlastných vektoroch matice H:

✓ vlastné čísla matice H sú reálne

✓ vlastné vektory matice H tvoria ortogonálnu bázu v $\mathbb{C}^n$

Obe tieto tvrdenia sa ľahko dokážu: začneme s prvým. Nech teda ϵ je vlastné číslo matice H. Dokážeme, že platí $\epsilon = \epsilon^*$, čo je to, čo potrebujeme. Nech vlastným vektorom zodpovedajúcim vlastnému číslu ϵ je v. Potom máme

$$\epsilon^*(v, v) = (\epsilon v, v) = (Hv, v) = (v, Hv) = (v, \epsilon v) = \epsilon(v, v) \;\Rightarrow\; \epsilon^* = \epsilon$$

Nech teraz platia rovnosti

$$Hv_1 = \epsilon_1 v_1 \qquad\qquad Hv_2 = \epsilon_2 v_2$$

a $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Počítame podobne ako vyššie (s využitím toho, že čísla $\epsilon_1,\ \epsilon_2$ sú reálne):

$$\epsilon_1(v_1, v_2) = (\epsilon_1 v_1, v_2) = (Hv_1, v_2) = (v_1, Hv_2) = (v_1, \epsilon_2 v_2) = \epsilon_2(v_1, v_2) \;\Rightarrow\; (\epsilon_1 - \epsilon_2)(v_1, v_2) = 0.$$

[9] v časti literatúry sa to zavádza naopak - ale to je len vec označenia

Ale keďže predpokladáme, že $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, tak z poslednej rovnosti máme, že

$$(v_1, v_2) = 0,$$

čo práve znamená, že vektory v_1 a v_2 sú vzájomne ortogonálne. Teraz ak je pravda, že matica H má všetky vlastné čísla (ktorých je n) navzájom rôzne (hovoríme, že vlastné čísla sú *nedegenerované*) tak príslušné vlastné vektory musia podľa predchádzajúceho byť lineárne nezávislé a sú teda bázou v $\mathbb{C}^n$. Čo ale v prípade, že matica H má degenerované (viacnásobné) vlastné čísla? No v tedy ale z definície sú vlastné vektory zopovedajúce jednomu a tomu istému vlastnému číslu lineárne nezávislé - a teda podľa Gramm-Schidtovho algoritmu môžu byť ortogonalizované - tým sa vraciame k predchádzajúcemu prípadu.
Každý vektor $U \in \mathbb{C}^n$ teda vieme (ortogonálne) rozložiť do bázy vlastných vektorov matice H:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v_i, U)}{(v_i, v_i)} v_i.$$

3.22 Nájdite vlatné čísla a vlastné vektory samozdruženej matice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: zapíšme podmmienku na vlastné čísla a vektory v tvare

$$Hv = \lambda v \;\Rightarrow\; (H - \lambda)v = 0.$$

Teda máme riešiť homogénnu sústavu - ak chceme netriviálne riešenie, tak potom musí byť determinant sústavy rovný nule - a to je práve podmienka na čísla λ; v našom prípade:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 = 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = +1,\; \lambda_2 = -1.$$

K vlastnému číslu 1 máme teda vlastný vektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rcl} iy & = & x \\ -ix & = & y \end{array}$$

v tvare

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

A pre vlastné číslo -1 analogicky dostávame:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rcl} iy & = & -x \\ -ix & = & -y \end{array}$$

a teda máme

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Priamim výpočtom overíme, že vektory v_1 a v_{-1} sú ozaj ortogonálne:

$$(v_1, v_{-1}) = x^* \cdot x + (-ix)^* \cdot (ix) = x^* \cdot x - x^* \cdot x = 0.$$

3.6 Fourierov integrál (transformácia)

✠ **definícia fourierovej transformácie**: uvažujeme funkciu f definovanú a absolútne integrovateľnú na $\mathbb{R}$ - t.j. existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Takejto funkcii priraďujeme jej Fourierovu transformáciu

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x. \tag{83}$$

✠ **spätná fourierova transformácia**: platí rovnosť:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{84}$$

✠ **parsevalova identita**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{85}$$

3.23 Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie ($h > 0$):

$$f_h(x) = \begin{cases} 1/h, & x \in [0, h] \\ 0, & x \notin [0, h] \end{cases} \tag{86}$$

Riešenie: priamim výpočtom podľa (83) máme

$$\hat{f}_h(\omega) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \int_0^h e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\omega} \left[e^{-i\omega x}\right]_{x=0}^{x=h} = \frac{i}{h\omega\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\omega h} - 1\right].$$

Nájdime ešte kvadrát absolútnej hodnoty funkcie $\hat{f}_h$ (tento udáva, pokiaľ si f_h predstavíme ako nejaký signál, jeho spektrálnu hustotu)

$$\left|\hat{f}_h(\omega)\right|^2 = \frac{1}{2\pi h^2\omega^2} \left[e^{-i\omega h} - 1\right] \left[e^{i\omega h} - 1\right] = \frac{1}{2\pi h^2\omega^2} \left[1 + 1 - e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}\right] = \frac{1}{\pi h^2\omega^2} \left[1 - \cos(\omega h)\right] = \frac{2}{\pi h^2\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right).$$

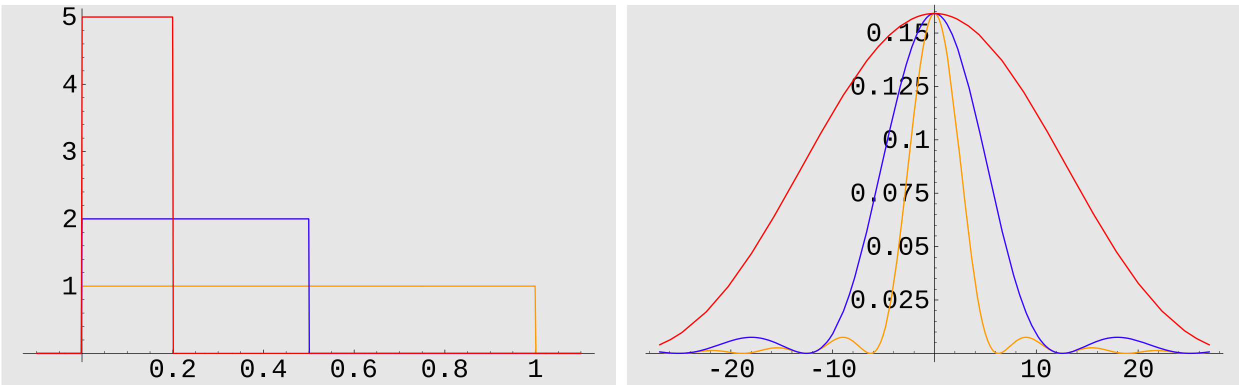
Funkcie (86) a kvadráty modulov ich Fourierových transformácií sú , pre niektoré výbery h, zobrazené na obrázku 33.

3.24 Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie ($T > 0$):

$$f_T(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \in [-T, T] \\ 0, & x \notin [-T, T] \end{cases} \tag{87}$$

Riešenie: podľa (83) máme

$$\hat{f}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} \cos(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} \cos(x)\left[\cos(\omega x) - i\sin(\omega x)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} \cos(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} \left\{\cos[x(1+\omega)] + \cos[x(1-\omega)]\right\}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin[x(1+\omega)]}{1+\omega} + \frac{\sin[x(1-\omega)]}{1-\omega}\right]_{x=-T}^{x=T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin[T(1+\omega)]}{1+\omega} + \frac{\sin[T(1-\omega)]}{1-\omega}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(T)\cos(T\omega) - \omega\sin(T\omega)\cos(T)}{1-\omega^2}. \tag{88}$$

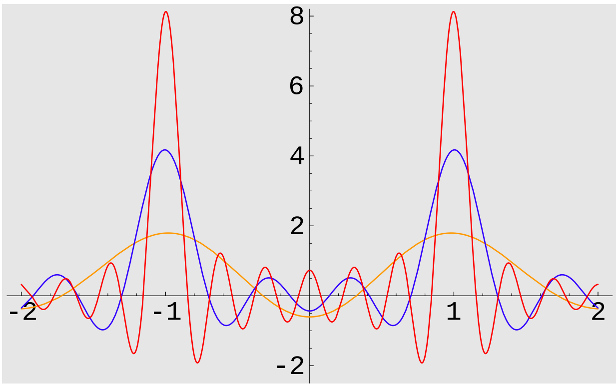


Obr. 33: Vľavo funkcie (86) pre $h = 0.6,\ 0.5,\ 0.4$ a v pravo zodpovedajúce $|\hat{f}_h|^2$.

Pri $T \to \infty$ máme čistý kosínusový signál, ktorého perióda je 2π a teda jeho (uhlová) frekvencia je 1 - preto funkcia $\hat{f}_T(\omega)$ pri T rastúcom nad všetky medze musí byť "lokalizovaná" v okolí bodov $\omega = \pm 1$. Naozaj:

$$\lim_{x\to\pm 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(T)\cos(T\omega) - \omega\sin(T\omega)\cos(T)}{1-\omega^2} = \frac{T + \cos(T)\sin(T)}{\sqrt{2\pi}} \sim T\ (T \gg 1).$$

Grafy funkcií $\hat{f}_T$ pre isté výbery T sú na obrázku 34.



Obr. 34: Funkcie (88) pre hodnoty $T = 4,\ 10,\ 20$.

3.25 Nájdite Fourierovu transformáciu funkcie

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\gamma x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}, \tag{89}$$

kde $\gamma > 0$.

Riešenie: priamim výpočtom podľa (83):

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\gamma x} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\gamma + i\omega)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-(\gamma+i\omega)x}}{\gamma + i\omega} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\gamma + i\omega},$$

takže

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2}.$$

3.26 Nájdite Fourierovu transformáciu funkcie

$$f(t)=\left\{\begin{array}{ll} e^{-\gamma t}\sin(\Omega t) & t\geq 0 \\ 0 \quad t<0 \end{array}\right. , \tag{90}$$

kde γ, Ω sú kladné konštanty[10].

Riešenie: Podľa (83) máme

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\gamma t}\sin(\Omega t)\, e^{-\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\gamma t}\frac{e^{i\Omega t}-e^{-i\Omega t}}{2i}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \left[e^{(-\gamma+i(\Omega-\omega))t}-e^{(-\gamma-i(\Omega+\omega))t}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(-\gamma+i(\Omega-\omega))t}}{-\gamma+i(\Omega-\omega)}-\frac{e^{(-\gamma-i(\Omega+\omega))t}}{-\gamma-i(\Omega+\omega)}\right]_0^\infty=$$
$$\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\gamma-i(\Omega-\omega)}-\frac{1}{\gamma+i(\Omega+\omega)}\right]=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\frac{2i\Omega}{\gamma^2+(\Omega^2-\omega^2)+2i\gamma\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Omega}{\gamma^2+(\Omega^2-\omega^2)+2i\gamma\omega}.$$

Ďalej nájdeme ešte modul funkcie $\hat{f}(\omega)$:

$$\left|\hat{f}(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Omega}{\sqrt{(\gamma^2+\Omega^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}=\frac{\Omega}{\sqrt{\gamma^4+2\gamma^2(\omega^2+\Omega^2)+(\omega^2-\Omega^2)^2}}. \tag{91}$$

Pozrime sa trocha na priebeh funkcie $|\hat{f}(\omega)|$, zrejme je definovaná pre všetky hodnoty ω, jej derivácia je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left|\hat{f}(\omega)\right|=-\frac{1}{2}\frac{\Omega}{\left[\gamma^4+2\gamma^2(\omega^2+\Omega^2)+(\omega^2-\Omega^2)^2\right]^{3/2}}\left[4\gamma^2\omega+4\omega\left(\omega^2-\Omega^2\right)\right] .$$

Takže

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left|\hat{f}(\omega)\right|_{\omega=\omega_0}=0 \;\Leftrightarrow\; \omega_0\left[\gamma^2+\omega_0^2-\Omega^2\right]=0.$$

ω_0 je teda

$$\omega_0=0 \qquad \text{alebo} \qquad \omega_0=\sqrt{\Omega^2-\gamma^2}\ ,$$

pričom zrejme druhá možnosť nastáva len pre $\Omega>\gamma$. Máme teda, že:

- pri $\Omega>\gamma$ je v $\omega=0$ lokálne minimum funkcie $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ a v $\omega=\sqrt{\Omega^2-\gamma^2}$ je lokálne maximum tejto funkcie
- pri $\Omega<\gamma$ funkcia $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ má lokálne maximum v bode $\omega=0$

Naviac je zrejme

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|=0.$$

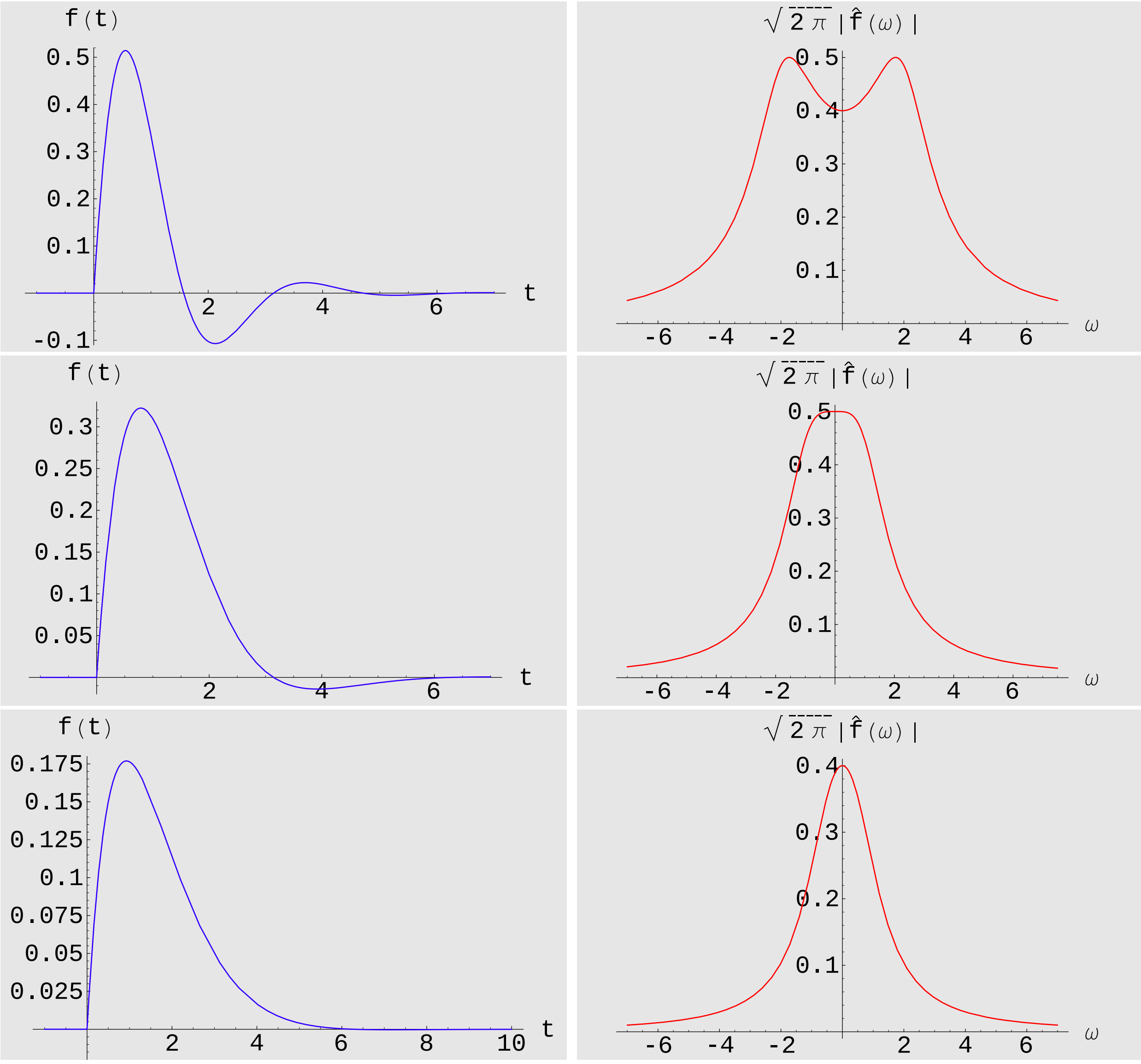
Grafy funkcie (90) a modulu jej Fourierovej transformácie (91) sú na obrázkoch 35.

3.27 Nájdite Fourierovu transformáciu Gaussovej distribúcie so stredom v bode x_0 a so šírkou σ:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}. \tag{92}$$

Riešenie: Najprv pre názornosť, na obrázku 36 sú znázornené niektoré konkrétne Gausssove distribúcie.

[10]takáto funkcia popisuje pohyb tlmeného lineárneho oscilátora, ktorý sa začal v čase $t=0$



Obr. 35: V ľavom stĺpci sú zobrazené funkcie (90) odhora dole pre hodnoty: $\gamma = 1$ a postupne $\Omega = 2, 1, 1/2$; v pravom stĺpci sú moduly ich Fourierových transformácií (až na násobok $\sqrt{2\pi}$). Poučenie je také, že pre priveľké tlmenie (γ) nemožno sledovaním $\hat{f}(\omega)$ dobre určiť hodnotu Ω.

Ďalej už v našej veci máme podľa (83):

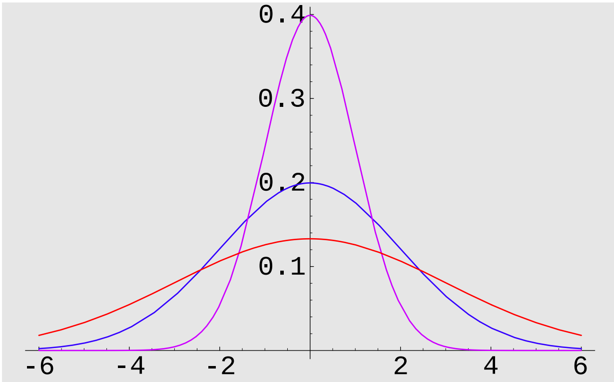
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = |x - x_0 = y| = \frac{e^{-i\omega x_0}}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega y}\mathrm{d}y = \left|\frac{y}{\sqrt{2}\sigma} = z\right| =$$
$$\frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-i\omega\sqrt{2}\sigma z}\mathrm{d}z = \frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\left[\cos\left(\omega\sqrt{2}\sigma z\right) - i\sin\left(\omega\sqrt{2}\sigma z\right)\right]\mathrm{d}z = |\text{nepárnosť}| =$$
$$\frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\cos\left(\omega\sqrt{2}\sigma z\right)\mathrm{d}z = |\text{párnosť}| = \frac{\sqrt{2}e^{-i\omega x_0}}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\cos\left(\sqrt{2}\omega\sigma z\right)\mathrm{d}z.$$

Teraz pomocou nejakých tabuliek integrálov alebo nejakého matematického software zistíme, že pre každé reálne α je

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\cos(\alpha z)\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

A toto môžeme použiť v našom prípade s

$$\alpha = \sqrt{2}\omega\sigma$$



Obr. 36: Tri Gaussove distribúcie - pre všetky je $x_0 = 0$ - čomu odpovedá poloha maxima (píku) v $x = 0$ - hodnoty σ pre krivky sú postupne : $1, 2, 3$ pre krivku s najväčšou, strednou a najmenšou hodnotou v lokálnom maxime.

a máme:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2}e^{-i\omega x_0}}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{2\omega^2\sigma^2}{4}} = \frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}. \tag{93}$$

Vidíme, že pre $x_0 = 0$ a $\sigma = 1$ je

$$f(z) = \hat{f}(z).$$

3.28 Nájdite Fourierovu transformáciu funkcií:

$a)\ f(x) = \begin{cases} \sin(x),\ x \in [-T,T] \\ 0,\ x \notin [-T,T] \end{cases}$ $\quad b)\ f(x) = \begin{cases} 1-|x|,\ x \in [-1,1] \\ 0,\ x \notin [-1,1] \end{cases}$ $\quad c)\ f(x) = \begin{cases} xe^{-x},\ x \in [0,\infty) \\ 0,\ x \in (-\infty,0) \end{cases}$