1070

vychádzame z BS zákona

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_C \frac{I \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

podľa zadania krivka C sa dá zadať parametrizáciou

$$C: \; x = a\cos\phi, \; y = a\sin\phi, \; z = 0, \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

to znamená, že

$$\mathrm{d}\vec{s} = a(-\sin\phi, \cos\phi, 0)\mathrm{d}\phi.$$

ďalej

$$\vec{r} = (-a\cos\phi, -a\sin\phi, z), \; r = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

a teda

$$\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r} = a(z\cos\phi, z\sin\phi, a)\mathrm{d}\phi.$$

takže magnetická indukcia, ktorú hľadáme je

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I}{(a^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} a(z\cos\phi, a\sin\phi, a)\mathrm{d}\phi = \frac{\mu}{2} \frac{a^2 I}{(a^2+z^2)^{3/2}}(0,0,1).$$

1072

Krivka C, teda popisovaná Archimedova špirála, sa dá parametricky zapísať v tvare

$$C: \; x = \frac{R}{2\pi n}\phi\cos\phi, \; y = \frac{R}{2\pi n}\phi\sin\phi, \; z = 0, \quad \phi \in [0, 2\pi n].$$

teda

$$\mathrm{d}\vec{s} = \frac{R}{2\pi n}(-\phi\sin\phi + \cos\phi, \phi\cos\phi + \sin\phi, 0)\mathrm{d}\phi$$

a

$$\vec{r} = \left(-\frac{R}{2\pi n}\phi\cos\phi, -\frac{R}{2\pi n}\phi\sin\phi, z\right), \; |r| = \sqrt{\frac{R^2}{4\pi^2 n^2}\phi^2 + z^2},$$

a teda

$$\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r} = \frac{R^2}{4\pi^2 n^2}(\tilde{}\,, \tilde{}\,, \phi^2)\mathrm{d}\phi.$$

takže z-tová zložka magnetickej indukcie na osi z je daná formulou

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{(\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r})_z}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{R^2}{4\pi^2 n^2} \int_C \frac{\phi^2}{(\frac{R^2}{4\pi^2 n^2}\phi^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \frac{R^2}{4\pi^2 n^2} \int_0^{2\pi n} \frac{\phi^2}{(\frac{R^2}{4\pi^2 n^2}\phi^2 + z^2)^{3/2}} \mathrm{d}\phi.$$

teraz

$$\int_0^{2\pi n} \frac{\phi^2}{(\frac{R^2}{4\pi^2 n^2}\phi^2 + z^2)^{3/2}} \mathrm{d}\phi = \frac{8\pi^3 n^3}{R^3} \int_0^{\frac{R}{z}} \frac{v^2}{(v^2+1)^{3/2}} \mathrm{d}v$$

a

$$\int_0^{\frac{R}{z}} \frac{v^2}{(v^2+1)^{3/2}} \mathrm{d}v = \left[\ln\{v + \sqrt{v^2+1} - \frac{v}{\sqrt{v^2+1}}\}\right]_{v=0}^{v=\frac{R}{z}} =$$

$$= \ln\left\{\frac{R}{z} + \sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1}\right\} - \frac{\frac{R}{z}}{\sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1}}.$$

takže finálne

$$B_z = \frac{\mu I}{2}\frac{n}{R}\left[\ln\left\{\frac{R}{z}+\sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1}\right\} - \frac{\frac{R}{z}}{\sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1}}\right].$$

1073

uvedený solenoid je krivka s parametrizáciou[1]

$$C:\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at\tan\alpha, \quad t\in[0,2\pi n].$$

teda

$$\mathrm{d}\vec{s} = a(-\sin t, \cos t, \tan\alpha)\mathrm{d}t$$

a

$$\vec{r} = (-a\cos t, -a\sin t, b - at\tan\alpha), \quad r^3 = (a^2 + (b - at\tan\alpha)^2)^{3/2}.$$

otázka smeruje len na z-zložku magnetickej indukcie na osi tohto solenoidu, preto potrebujeme len

$$(\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r})_z = a^2.$$

a teda

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi n}\frac{a^2}{[a^2+(b-at\tan\alpha)^2]^{3/2}}\mathrm{d}t = \frac{\mu I}{4\pi}\frac{a}{\tan\alpha}\int_{b-2\pi na\tan\alpha}^{b}\frac{\mathrm{d}u}{(a^2+u^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi a\tan\alpha}\int_{\frac{b-2\pi na\tan\alpha}{a}}^{\frac{b}{a}}\frac{\mathrm{d}v}{(v^2+1)^{3/2}} =$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi a\tan\alpha}\left[\frac{v}{\sqrt{v^2+1}}\right]_{\dots}^{\dots} = \dots$$

1074

nech je jeden vodič zhodný s osou z, teda krivkou

$$C:\ x = 0,\ y = 0,\ z = t, \quad t\in\mathbb{R}.$$

nájdeme magnetickú indukciu od tohto vodiča v celom priestore, nech teda

$$x^2+y^2>0,$$

potom

$$\mathrm{d}\vec{s} = (0,0,1)\mathrm{d}t$$

a

$$\vec{r} = (x, y, z-t), \quad r^3 = (x^2+y^2+(z-t)^2)^{3/2}.$$

ďalej

$$\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r} = (-y, x, 0)$$

a teda magnetická indukcia je

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}(-y,x,0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x^2+y^2+(z-t)^2)^{3/2}}.$$

[1] pozri zadanie: rozdiel je v tom, že *môj* solenoid nemá stred v $(0,0,0)$ – prerob to presne na prípad zadania so stredom v $(0,0,0)$ – v čom je rozdiel?

označme

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2 + y^2 + (z-t)^2)^{3/2}}.$$

potom:

- $\mathcal{J}$ nezávisí od z – zdôvodni prečo to tak je!
- $\mathcal{J}$ závisí od x, y len v kombinácii

  $$x^2 + y^2$$

  – znova zdôvodni prečo to tak je a čo to znamená!

výpočet

$$\mathcal{J} = \frac{1}{x^2 + y^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^{3/2}} = \frac{2}{x^2 + y^2},$$

takže magnetická indukcia vodiča zhodného s osou z je

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}(-y, x, 0)\frac{2}{x^2 + y^2}.$$

ak teraz priamka

$$\Gamma: \ (x, y, t), \ t \in \mathbb{R}$$

je druhý vodič s prúdom $\hat{I}$, tak potom hustota sily, ktorou pôsobí prvý vodič na druhý je[2]

$$\vec{f} = -\vec{B} \times \hat{I}(0,0,1) = -\hat{I}\frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{x^2 + y^2}(x, y, 0).$$

sila smeruje do prvého vodiča a je príťažlivá ak sú prúdy súhlasné. ak je vzdialenosť vodičov a, tak

$$a^2 = x^2 + y^2$$

a veľkosť hustoty sily je

$$|\vec{f}| = \frac{\mu |I\hat{I}|}{2\pi a}.$$

[2] Lorentzova sila