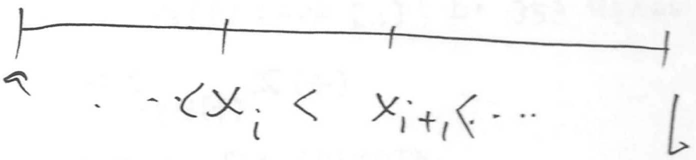
V1.: Ak $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sú také, že:

- f je nerastúca a nezáporná
- g je integrovateľná

potom $\exists$ číslo $\xi \in [a, b]$, že:

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(a) \int_a^{\xi} g}$$

dôkaz: nech teda $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ je nejaké delenie



potom

$$\int_a^b f \cdot g = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \cdot g =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g \; +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]\, g(x)\, dx$$

$$\overset{\text{ozn.}}{=} A \; \cancel{+ B} \; + B$$

ukážeme, že B je malá veličina; naozaj:

$$|B| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)|\,|g(x)|\,dx \le$$

$$\le \sup_{[a,b]}\{|g|\} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)|\,dx \le$$

$$\cancel{\le \sup_{[a,b]} |g| \cdot \Omega_i \cdot (x_{i+1} - x_i)}$$

~~kde $\Omega_i =$~~

$$\le \sup_{[a,b]}\{|g|\} \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f(x) \Big\} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sup_{[a,b]}\{|g|\} \cdot \{ S[f] - s[f] \} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{0}}$$

horný, dolný

Darbouxov súčet f-cie $\underline{f}$

takže:

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = \lim_{\max\{x_{i+1} - x_i\} \to 0} A}$$

Nech teraz $G: [a,b] \to \mathbb{R}$, že:

$$G(x) = \int_a^x g$$

Potom
$$A = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[G(x_{i+1}) - G(x_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] + G(b)f(x_{n-1})$$

Teraz $G: [a,b) \to \mathbb{R}$ je <u>spojitá</u> $\Rightarrow$ existujú čísla

$$\begin{cases} m = \min\limits_{[a,b]} \{G\} \\ M = \max\limits_{[a,b]} \{G\} \end{cases}$$

takže (s využitím toho, že f <u>nerastie</u> a je ohr.)

$$m f(a) \leq A \leq M f(a)$$

lenže
$$\int_a^b f \cdot g = A + B \to 0$$

takže
$$m f(a) \leq \int_a^b f \cdot g \leq M f(a)$$

a preto $\exists$ číslo $\mu \in [m, M]$, že

$$\int_a^b f \cdot g = \mu \cdot f(a)$$

teraz G je spojitá funkcia $\Rightarrow$ pre dané $\mu \in [m, M]$ $\exists$ číslo $\xi \in [a, b]$, že:

$$\mu = G(\xi)$$

a preto $$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(a) \int_a^\xi g}$$ ∎

<u>Veta 2:</u> Ak f je neklesajúca a nezáporná a g je integrovateľná, potom ~~zase~~

$$\int_a^b f g = f(b) \int_\xi^b g$$

pre nejaké $\xi \in [a, b]$.

<u>d.:</u> rovnako ako <u>V1.</u>

~~Sp~~ Ak by teraz $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bola monotónna a ohraničená, a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integr. potom ak napr f nerastie, tak

$$f(x) - f(b) \geq 0$$

a aplikuje sa $V1$

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]\, g(x)\, dx =$$

$$= \{f(a) - f(b)\} \int_a^{\xi} g(x)\, dx$$

len že na ľavej strane:

$$\int_a^b \{\quad\} = \int_a^{\xi} \{\quad\} + \int_{\xi}^b \{\quad\}$$

a preto platí

$$(+) \qquad \boxed{\int_a^b f g = f(a) \int_a^{\xi} g + f(b) \int_{\xi}^b g}$$

<u>Veta</u> (2. veta o strednej hodnote)

Ak $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f je ohraničená monotónna, g je integrovateľná, potom existuje číslo $\xi \in [a, b]$, že platí formula (+)

Diskusia: f-cia f nemusela byť spojitá, to ale upriamuje pozornosť na hodnoty $f(a)$ a $f(b)$

Naozaj, ak zmeníme

$$f \longmapsto \hat{f}$$

len v krajnom bode, povedzme a ne nerastúcu f-ciu f: $\hat{f}(a) = A \geq f(a+0)$ [zach. monot.]

potom formula (+) ostane tiež platiť (viď dôkaz) akurát sa zmení hodnota ξ !!!