ZLATO

Téma Zlato súvisí s témou Karáty.

Úlohu 1 možno riešiť výpočtom alebo odhadom. Pri odhade pritom možno využiť buď číselnú informáciu o hustote zlata alebo „optickú informáciu" o veľkosti kilogramovej tehličky. Bolo by dobré, aby žiaci o rôznych spôsoboch riešenia diskutovali (buď po skončení riešenia úlohy 1, ak ju riešili každý samostatne, alebo počas spoločnej diskusie o riešení tejto úlohy, ak učiteľ zvolil túto formu). Ak niektorú možnosť sami nenavrhnú, môže na ňu v diskusii upozorniť učiteľ.

Úlohu 2 sme zaradili ako druhú v poradí, aby jej riešenie neovplyvnilo žiakov pri riešení úlohy 1. Predpokladáme totiž, že po vyriešení úlohy 2 by väčšina žiakov mala tendenciu riešiť úlohu 1 výpočtom a nerozmýšľala by o možnosti odhadu.

Ak úloha 4 žiakov zaujme, môžu skúsiť vypočítať, koľko zlata by potrebovali na pozlátenie vlastnej sochy v životnej veľkosti. Na výpočet svojho telesného povrchu môžu použiť buď vzorec uvedený v texte (Mostellerov vzorec) alebo nomogram znázornený v úlohe Nomogramy. Výsledky by sa mali pohybovať v rozmedzí 2 *g až* 4 *g (v literatúre sa uvádza, že priemerný telesný povrch detí vo veku 9 rokov je* 1,07 *m^2, vo veku 10 rokov je to* 1,14 *m^2 a vo veku 12-13 rokov* 1,33 *m^2).*

1. obr. č. **4**

   Sú možné rôzne zdôvodnenia, napr.:

   1. *výpočtom*

      Vypočítame dĺžku hrany kocky z rýdzeho zlata s hmotnosťou 1 000 kg (t.j. 1 000 000 g):

      $$1\,000\,000 : 19{,}29 = 51\,840{,}331\,778\ \ldots,$$

      preto objem hľadanej kocky je $51\,840{,}331\,778\ \ldots$ cm^3. Hrana kocky s týmto objemom má dĺžku

      $$\sqrt[3]{51\,840{,}331\,778\ \ldots} = 37{,}286\,869\ \ldots \approx 37\ \text{cm}.$$

      Tejto veľkosti zodpovedá obrázok č. 4.

   2. *odhadom*:

      a) Odhadneme (veľmi zhruba) objem kociek na jednotlivých obrázkoch. Kocky na obrázkoch č. 1 a 2 majú hranu dlhšiu ako 1 m, teda ich objem je väčší ako 1 m^3 = 1 000 000 cm^3. Preto majú hmotnosť viac ako 19 290 000 g = 19,29 t. Kocka na obrázku č. 3 má hranu dlhšiu napr. ako 60 cm = 600 mm, teda jej objem je aspoň

      $$600 \cdot 600 \cdot 600 = 216\,000\,000\ \text{mm}^3 = 216\,000\ \text{cm}^3.$$

      Potom jej hmotnosť je aspoň

      $$216\,000 \cdot 19{,}29 = 4\,166\,640\ \text{g} \approx 4\ \text{t}.$$

      Zostáva teda len kocka na obrázku 4.

      b) Kocka s hranou 1 m má hmotnosť asi 20 t. Kocka s hranou polovičnej dĺžky má hmotnosť 8-krát menšiu (to je viac ako 2 tony), kocka s hranou tretinovej dĺžky hmotnosť 27-krát menšiu (to je už menej ako 1 tona). Preto dĺžka hrany hľadanej kocky je medzi $\frac{1}{3}$ metra a $\frac{1}{2}$ metra. Tejto veľkosti zodpovedá len obrázok č. 4.

      c) Využijeme informáciu z úvodného textu (kilogramová tehlička má veľkosť asi ako mobilný telefón). 1 tonu tvorí 1 000 takých tehličiek, z nich možno vytvoriť hranol 10 × 10 × 10 tehličiek. Aby sme dostali približne kocku, každú tehličku rozdelíme na 2 polovice tak, že ju rozrežeme v polovici dĺžky. Ak polovice položíme na seba, dostaneme tehličku, ktorá je približne kockou. Jej najväčší rozmer je polovica pôvodnej dĺžky tehličky, teda asi polovica dĺžky mobilu. Primeraním k nohe zistíme, že od kolena po zem je asi 5-násobok dĺžky mobilu (teda asi 10 polovíc dĺžky mobilu). Preto naša kocka by nemala siahať vyššie ako po kolená.

2. Odpoveď závisí od hmotnosti žiaka, pre hmotnosti medzi 35 kg a 55 kg je to od 12 cm do 14 cm.

   Uvádzame príklad výpočtu pre žiaka s hmotnosťou 45 kg. Hľadaná kocka má objem
   $$45\,000 : 19{,}29 = 2\,332{,}81\ldots\ \text{cm}^3,$$
   preto jej hrana má dĺžku
   $$\sqrt[3]{2\,332{,}81\ldots} = 13{,}26\ldots \approx 13\ \text{cm}.$$

3. približne **518** m^2

   1 kg zlata má objem $V = 51\,840{,}331\,778\ldots\ \text{mm}^3$ (porovnaj s riešením 1 úlohy 1). Potrebujeme nájsť plošný obsah P podstavy kvádra, ktorý má objem V a výšku $h = 0{,}0001$ mm. Z rovnosti $V = Ph$ dostávame
   $$P = \frac{V}{h} = \frac{51\,840{,}331\,778\ldots}{0{,}000\,1} = 518\,403\,317{,}78\ldots\ \text{mm}^2 = 518{,}403\,317\ldots\ \text{m}^2 \approx 518\ \text{m}^2.$$

4. Na pozlátenie svojej sochy v životnej veľkosti by pán Róbert potreboval asi **4** g zlata.

   Podľa uvedeného vzorca je povrch tela pána Róberta približne
   $$\sqrt{\frac{96 \cdot 173}{3\,600}} = 2{,}147\,867\ldots \approx 2{,}15\ \text{m}^2.$$

   Uvedieme dve možnosti ďalšieho postupu:

   1. Využijeme výsledok predchádzajúcej úlohy. Podľa neho približne 518,403 m^2 lístkového zlata hrúbky 0,0001 mm má hmotnosť 1 000 g. Potrebujeme zistiť, akú hmotnosť má 2,15 m^2 takéhoto lístkového zlata. Hľadaná hmotnosť je
   $$\frac{2{,}15}{518{,}403} \cdot 1\,000 = 4{,}147\ldots \approx 4\ \text{g}.$$

   2. Vypočítame objem zlata potrebného na pozlátanie (v cm^3, pretože hustotu máme určenú v jednotkách g/cm^3), z neho zistíme hmotnosť tohto zlata. Keďže hrúbka lístkového zlata je udaná v milimetroch, vyjadríme telesný povrch pána Róberta tiež v mm^2:
   $$2{,}15\ \text{m}^2 = 2\,150\,000\ \text{mm}^2.$$
   Lístkové zlato, ktoré má hrúbku 0,0001 mm a pokryje plochu $2\,150\,000\ \text{mm}^2$, má objem
   $$2\,150\,000 \cdot 0{,}000\,1 = 215\ \text{mm}^3 = 0{,}215\ \text{cm}^3,$$
   jeho hmotnosť je
   $$0{,}215 \cdot 19{,}29 = 4{,}147\,35 \approx 4\ \text{g}.$$

Úlohy 1 a 2 možno doplniť ďalším námetom: určiť rozmery kilogramovej tehličky zlata na obrázku v úvodnom texte. Keďže tehlička nie je presný kváder (má zaoblené rohy), bude vhodné v diskusii so žiakmi túto úlohu modifikovať: Nájsť rozmery kvádra z rýdzeho zlata s hmotnosťou 1 000 g, ktorý sa tvarom podobá tehličke na obrázku (teda vzájomné pomery medzi jeho rozmermi sú čo najviac podobné vzájomným pomerom medzi rozmermi tehličky). Na vyriešenie úlohy potrebujeme poznať

- *objem hľadaného kvádra, ten je* $1\,000 : 19{,}29 = 51{,}840\,33\ldots\ \text{cm}^3 = 51\,840{,}33\ldots\ \text{mm}^3$,
- *vzájomné pomery medzi rozmermi tehličky: odmeraním na obrázku tehličky dostaneme približne*
  $$2{,}5 : 1{,}2 : 0{,}5.$$

Ďalej možno postupovať viacerými spôsobmi:

1. *Zistiť, koľkonásobne treba zväčšiť rozmery kvádra* $2{,}5 \times 1{,}2 \times 0{,}5$, *aby vznikol kváder s objemom* $51\,840{,}33\ldots\ \text{mm}^3$. *Hľadáme teda k tak, aby*

$$2{,}5k \cdot 1{,}2k \cdot 0{,}5k = 51\,840{,}33\ldots, \quad tj. \quad 1{,}5k^3 = 51\,840{,}33\ldots\ .$$

Riešením tejto rovnice dostávame

$$k^3 = 34\,560{,}221\ldots\ , \quad odtiaľ \quad k = 32{,}573\ldots\ .$$

Týmto postupom dostaneme rozmery

$$2{,}5k = 81{,}43\ldots\ mm, \quad 1{,}2k = 39{,}08\ldots\ mm, \quad 0{,}5k = 16{,}28\ldots\ mm.$$

2. *Hľadať taký rozklad čísla* 51 840 *na súčin troch celých čísel, aby pomer jednotlivých činiteľov bol približne* 2,5 : 1,2 : 0,5 *(toto riešenie pokladáme za menej pravdepodobné ako predchádzajúce, pravdepodobnosť jeho výskytu sa však zvýši, ak sa učiteľ so žiakmi dohodne, že budú hľadať kvádre, ktorých rozmery v mm sú celé čísla). Z viacerých možných riešení najbližšie k skutočným rozmerom tehličky na obrázku majú* 80 × 36 × 18 *(mm) a* 81 × 40 × 16 *(mm). Ďalšie možnosti sú napr.* 72 × 40 × 18 *(mm),* 72 × 36 × 20 *(mm).*

V skutočnosti má tehlička na obrázku rozmery 80 *mm* × 40 *mm* × 18 *mm (súčin týchto čísel je väčší ako* 51 840, *je to spôsobené tým, že tehlička nie je dokonalý kváder).*

Poznámka. V literatúre sa uvádza viacero hodnôt hustoty zlata, najčastejšie 19,30 *g/cm³. Kvôli druhému z uvedených postupov sme zvolili zriedka uvádzanú hodnotu* 19,29 *g/cm³, aby objem kvádra (zaokrúhlený na celé mm³) bolo číslo „dobre“ rozložiteľné na súčin.*