ŠKATUĽKY

Úlohu 4 môžeme zadať ako skupinovú prácu, pričom si žiaci v každej skupine rozdelia, s akými rozmermi odstrihnutých štvorčekov bude každý z nich počítať.

V zadaní úlohy 5 nie je uvedený predpoklad, že pri oblepovaní jednej steny nebudú chlapci kombinovať viacero menších ústrižkov ozdobného papiera. Očakávame, že žiaci to budú podvedome predpokladať. Ak to učiteľ uzná za potrebné, môže tento nevyslovený predpoklad ujasniť v diskusii.

1. Ivova škatuľka má rozmery **20 cm × 6 cm × 4 cm.**
   Emilova škatuľka má rozmery **24 cm × 10 cm × 2 cm.**

2. Ivova škatuľka má objem **480** cm^3,
   Emilova škatuľka má objem tiež **480** cm^3.

3. **Pravdu nehovoril ani jeden z chlapcov**.

   Emilova škatuľka nie je vyššia ako Ivova.
   Ivova škatuľka nemá väčší objem ako Emilova.

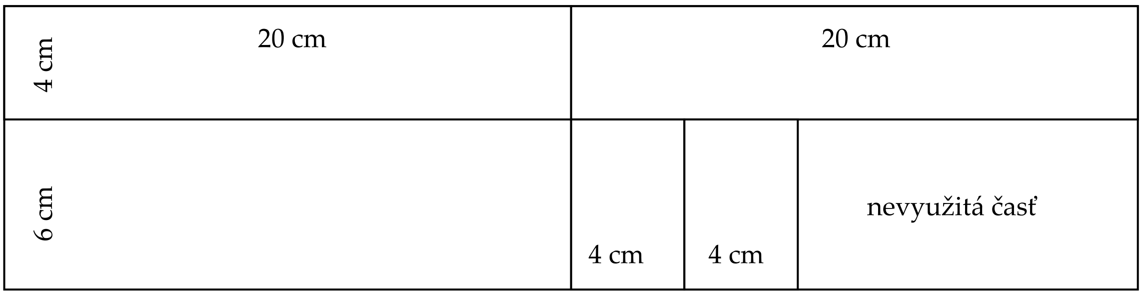
4. Škatuľka sa **dá** zhotoviť.

   Stačí z rohov vystrihnúť štvorce so stranou 3 cm alebo 2,5 cm alebo 3,5 cm. Žiaci môžu postupne počítať objem pre odstrihnuté štvorce so stranami 0,5 cm, 1 cm, 1,5 cm, 2,5 cm, 3 cm, 3,5 cm, 4,5 cm, 5 cm, 5,5 cm, 6 cm a 6,5 cm. Objemy vyjdú postupne 175,5 cm^3, 312 cm^3, 412,5 cm^3, 517,5 cm^3, 528 cm^3, 514,5 cm^3, 427,5 cm^3, 360 cm^3, 280,5 cm^3, 192 cm^3 a 97,5 cm^3. S počítaním objemov môžu žiaci skončiť v okamihu, keď nájdu objem väčší ako 500 cm^3.

5. Emilova škatuľka: ozdobný papier **nebude** stačiť. Ivova škatuľka: ozdobný papier **bude** stačiť.

   Emilova škatuľka: Hoci povrch škatuľky ($240+48+48+20+20=376$ cm^2) je menší ako obsah papiera (400 cm^2), z papiera sa nedá vystrihnúť päť obdĺžnikov s potrebnými rozmermi. Po odstrihnutí obdĺžnika s rozmermi 24 cm × 10 cm totiž zostane obdĺžnik 16 cm × 10 cm. Z neho nemožno vystrihnúť obdĺžnik, ktorého jeden rozmer je 24 cm (uhlopriečka obdĺžnika s rozmermi 16 cm × 10 cm je len približne 18,8 cm).

   Možné riešenie pre *Ivovu škatuľku* je na obrázku.



6. Objem škatule bude **1 944 cm**^{3}.

   Do uvedeného vzťahu dosadíme $a=21$, $b=45$, dostaneme dĺžku strany odstrihnutých štvorčekov:

$$\frac{21+45-\sqrt{21^2-21\cdot 45+45^2}}{6}=\frac{66-39}{6}=4{,}5\,.$$

   Hľadaná škatuľa s maximálnym objemom má teda rozmery

$$21-2\cdot 4{,}5=12 \text{ cm}, \qquad 45-2\cdot 4{,}5=36 \text{ cm} \quad \text{a} \quad 4{,}5 \text{ cm},$$

   jej objem je

$$12\cdot 36\cdot 4{,}5=1\,944 \text{ cm}^3.$$

Poznámka 1: Uvedený vzťah možno odvodiť pomocou diferenciálneho počtu. Označme veľkosť strany odstrihávaného štvorčeka x. Podľa zadania má kartón rozmery a × b (predpokladajme, že a je menší z nich). Potom škatuľa má rozmery $a-2x, b-2x, x$ *a jej objem je*

$$V(x)=(a-2x)\cdot(b-2x)\cdot x = abx-2ax^2-2bx^2+4x^3 .$$

Hľadáme maximum tejto funkcie na intervale $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$*, pritom* $V(0)=V\left(\frac{a}{2}\right)=0$. *Preto hodnota x, pre ktorú funkcia* $V(x)$ *hľadané maximum nadobúda, leží vnútri intervalu* $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$ *a* $V(x)$ *v nej má nulovú deriváciu. Derivovaním funkcie* $V(x)$ *dostaneme*

$$V'(x)=ab-4ax-4bx+12x^2=ab-4(a+b)x+12x^2 .$$

Rovnica $V'(x)=0$ *má korene*

$$x_{1,2}=\frac{4a+4b\pm\sqrt{(-4a-4b)^2-4\cdot 12\cdot ab}}{24}=\frac{4a+4b\pm\sqrt{16a^2-16ab+16b^2}}{24}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6},$$

z nich v intervale $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$ *leží len* $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ *(nie je ťažké dokázať, že pre* $b\geq a>0$ *platí nerovnosť* $a^2-ab+b^2\geq a^2$*, z ktorej vyplýva, že koreň* $\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ *je väčší alebo rovný* $\frac{a}{2}$*). Preto na intervale* $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$ *nadobúda funkcia* $V(x)$ *svoje maximum pre* $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

Poznámka 2: Riešme obdobu úlohy 5, tentoraz pre ozdobný papier s rozmermi 36 cm × 26 cm a pre dve škatuľky s rozmermi 12 cm × 36 cm × 4,5 cm (tú sme našli v riešení úlohy 6) a 33 cm × 9 cm × 6 cm (tá vznikne, ak z rohov kartónu odstrihneme štvorce 6 cm × 6 cm). Úloha je zaujímavá svojím výsledkom: prvú škatuľku možno obaliť, a druhú nie, hoci druhá škatuľa má menší povrch aj objem ako prvá.