

CESTA

Po vyriešení úlohy 4 a pred riešením ďalších úloh navrhujeme usporiadať v triede (ako domácu aktivitu) súťaž o návrh najlacnejšej cesty.

Najnižšiu možnú cenu cesty nájdeme v úlohe 6.

Po skončení alebo v priebehu riešenia tejto témy možno so žiakmi diskutovať o tom, nakoľko presné výsledky sú ešte reálne: či má zmysel počítať napríklad dĺžku cesty na centimetre a na základe toho zisťovať cenu s presnosťou na koruny. Cena za 1 kilometer cesty sa spravidla určuje ako priemer vypočítaný z celkovej ceny dlhšieho úseku, tá zahŕňa napríklad aj privezenie ťažkých stavebných mechanizmov. Nemá preto zmysel na základe takejto ceny uvažovať, koľko by stálo 100 metrov, 1 meter alebo 10 centimetrov novej cesty.

1. približne 82 miliónov Sk

$$(12,1 + 2,8) \cdot 5\,500\,000 = 81\,950\,000 \approx 82\,000\,000$$

2. približne 82 miliónov Sk

Priamu vzdialenosť Abrahámovo (A) – Bezinka (B) určíme pomocou Pytagorovej vety:

$$|AB| = \sqrt{12,1^2 + 2,8^2} = \sqrt{154,25} = 12,419\,742\,348 \dots \text{ km.}$$

Cesta tejto dĺžky by stála

$$6\,600\,000 \cdot 12,419\,742\,348 \dots = 81\,970\,299,499 \dots \approx 82\,000\,000 \text{ (Sk).}$$

Poznámka: Rovnaký výsledok dostaneme, ak vzdialenosť $|AB|$ zaokrúhlime na desatiny kilometra:

$$12,4 \cdot 6\,600\,000 = 81\,840\,000 \approx 82\,000\,000.$$

Pri zaokrúhlení na celé kilometre by sme dostali výsledok

$$12 \cdot 6\,600\,000 = 79\,200\,000 \approx 79\,000\,000,$$

ten už v tejto úlohe nepokladáme za správny.

3. približne 80 miliónov Sk

Označme bod odklonu C. Pomocou Pytagorovej vety vypočítame dĺžku úsečky CB:

$$|CB| = \sqrt{9,5^2 + 2,8^2} = \sqrt{98,09} = 9,904 \dots \text{ km.}$$

Keďže časť cesty povedie po poľnej ceste a časť mimo poľnej cesty, celkovú cenu dostaneme ako súčet týchto dvoch cien:

$$2,6 \cdot 5\,500\,000 + 9,904 \dots \cdot 6\,600\,000 = 79\,666\,661,2 \dots \approx 80\,000\,000 \text{ Sk.}$$

Poznámka. Opäť pozor na zaokrúhľovanie vzdialeností na celé kilometre.

4. Predpokladáme, že žiaci si budú voliť miesto odklonu a pre každý zvolený prípad vypočítajú príslušnú cenu. Pri kontrole žiackych riešení si učiteľ môže pomôcť grafom funkcie C z úlohy 6.

$$\begin{aligned} 5. \text{ Cena } C &= (12,1 - x) \cdot 5\,500\,000 + \sqrt{x^2 + 2,8^2} \cdot 6\,600\,000 = \\ &= 66\,550\,000 - 5\,500\,000x + 6\,600\,000\sqrt{x^2 + 7,84}, \quad x \text{ je z intervalu } (0;12,1). \end{aligned}$$

Poznámka. Dosadením $x=0$ do tohto predpisu by sme dostali cenu cesty, ktorá by viedla po trase pôvodnej poľnej cesty, pričom 1 km úseku od Abrahámovo po osamelý dom by stál 5 500 000 korún a cena 1 km úseku od osamelého domu po Bezinku by bola 6 600 000 korún. Preto sa hodnota $C(0)$ nezhoduje s výsledkom úlohy 1 (vidno to aj na grafe funkcie C v zadaní úlohy 6). V nej bola cena 1 km cesty na oboch úsekoch stále 5 500 000 korún. Z tohto dôvodu sme z definičného oboru funkcie C vylúčili hodnotu 0.

6. Funkcia nadobúda minimum v hodnote $x \approx 4,2$.

Cena najlacnejšej cesty je približne **77 miliónov**.



Hodnotu $x \approx 4,2$ možno odčítať z grafu (jeden dielik na vodorovnej osi predstavuje vzdialenosť 0,4 km). Rovnako tak možno z grafu odčítať aj približnú hodnotu 77 miliónov. V zadaní sa však požaduje, aby žiak túto hodnotu vypočítal. Dosadením $x = 4,2$ do predpisu funkcie C z riešenia úlohy 5 dostaneme

$$C(4,2) = (12,1 - 4,2) \cdot 5\,500\,000 + \sqrt{4,2^2 + 2,8^2} \cdot 6\,600\,000 = 76\,765\,293,78... \approx 77\,000\,000 \text{ (Sk)}.$$

Poznámka. Presnú hodnotu minima funkcie

$$C = 66\,550\,000 - 5\,500\,000x + 6\,600\,000\sqrt{x^2 + 7,84}$$

možno vypočítať pomocou derivácie (zistíme, pre ktoré x sa derivácia funkcie C rovná nule a vypočítame hodnotu $C(x)$ v tomto bode). Derivácia funkcie C je

$$C'(x) = -5\,500\,000 + 6\,600\,000 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7,84}}.$$

Riešením rovnice $C'(x) = 0$ postupne dostaneme

$$5\,500\,000 = 6\,600\,000 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7,84}}, \quad 55\sqrt{x^2 + 7,84} = 66x, \quad 5\sqrt{x^2 + 7,84} = 6x,$$

$$25(x^2 + 7,84) = 36x^2, \quad 25 \cdot 7,84 = 11x^2,$$

odtiaľ

$$x^2 = \frac{196}{11}, \quad x = 4,221...$$

Pre $x = 4,221...$ nadobúda funkcia C hodnotu

$$C = 76\,765\,204,35... \text{ (Sk)}.$$